

# 斜壓和正壓不穩定的介紹

李 永 安

中央氣象局科技中心

(收稿日期: 77. 4. 25; 審稿日期: 77. 4. 25; 定稿日期: 77. 5. 2)

## 摘 要

本文簡要的介紹斜壓和正壓不穩定的理論。從能量方程式和位渦動力, 我們探討不穩定的條件。斜壓不穩定方面, 我們介紹了兩個最基本的模式, Eady 和 Charney 模式, 並且討論不同假設下產生的異同。正壓不穩定方面, 我們介紹 Lindzen 模式。從這模式中, 我們比較斜壓和正壓不穩定之間的異同。

關 鍵 詞: 斜壓、正壓、不穩定

Key words: baroclinic, barotropic, instability

## 一、引 言

大氣和海洋的運動基本上是一種能量的傳送過程, 使地球的氣候維持一個近似平衡的狀態。從熱力學上來看, 最簡單的大氣運動是暖空氣在赤道地區上升而在極地沉降。因質量守恆的關係, 空氣在上大氣層由赤道流向極地, 在近地層由極地流回赤道, 形成一個封閉的環流。這種熱力引發的環流我們稱為哈德里環流 (Hadley Circulation)。然而由於柯氏力 (Coriolis force) 的作用, 實際大氣中這個環流並不能延伸到極地, 大約在緯度  $30^\circ$  左右就沉降。在中高緯度, 我們所看到的大氣運動主要是一串串的波動。這些波動不僅直接影響每天的天氣變化, 也非常有效率的把低緯度多餘的能量傳送到高緯度, 使赤道地區不至於越來越熱而極地越來越冷的情況。

這些波動是如何產生的呢? 從觀測資料中我們並沒有任何證據顯示他們的生命週期與任何外力的週期 (例如天文上的週期) 有相關。在沒有外力作用下, 這些波動的產生是經由大氣本身內在的機制來引發的。從 Charney (1947) 和 Eady (1949) 的研究中我們知道, 當平均風場有垂直風場時, 在適當的條件下, 平均風場會釋放可用位能供擾動長大。因為有垂直風切表示大氣是個斜壓系統, 因此

這種現象我們稱為斜壓不穩定。另一方面 Kuo (1949) 也證實, 當平均風場有水平風切和滿足特定的條件, 平均風場的動能可以轉換為擾動的動能使擾動長大。這種現象我們稱為正壓不穩定。圖一—是平均經向風 (zonal wind),  $\bar{u}$ , 的緯向高度剖面圖。我們可以看出  $\bar{u}$  有很明顯的水平和垂直風切, 也就是平均大氣是處於潛在的正壓和斜壓不穩定狀態中。

由於這兩種不穩定和大氣的波動有密切的關係, 本文將對他們的理論做簡單而有系統的介紹。在第二節中我們介紹產生不穩定的必要條件和其所含的物理意義。在第三節, 我們介紹斜壓不穩定研究中兩個最基本的模式, Eady 和 Charney 模式。在第四節, 我們介紹正壓不穩定問題, 同時說明正壓和斜壓不穩定之間的相似性。最後一節, 我們將整個理論做個總結。

## 二、不穩定的條件

因為控制大氣運動的原始方程式十分複雜, 我們在探討現象的來龍去脈時, 都需要做一些理想化的假設來簡化問題。當我們研究大尺度現象時, 因為羅士培參數很小, 可以用準地轉近似來簡化控制方程式。在探求波動的產生時, 我們可以假設初始的擾動很小。因此方程式中的非線性項可以忽略。

在絕熱和無摩擦力作用的情況下，在  $\beta$  平面上擾動的無因次線性準地轉位渦方程式可表示如下：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) q + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \pi_0}{\partial y} = 0 \dots\dots(2.1)$$

$x, y, z, t$  是經向，緯向，高度和時間變數。 $U$  是基本風場，在這裏我們只考慮它是緯向和高度的函數。 $\phi$  是擾動的流線函數， $q$  和  $\pi_0$  是擾動和基本場的位渦。

$$q = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\rho_s}{S} \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \pi_0}{\partial y} = \beta \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\rho_s}{S} \frac{\partial U}{\partial z} \quad (2.3)$$

$\rho_s$  是基本場的密度，只是高度的函數。 $\beta$  和  $S$  是無因次參數。

$$\beta = 2\Omega \cos \phi_0 \frac{L^2}{aU_0},$$

$$S = \frac{N_s^2 D^2}{f_0^2 L^2} = \frac{L_c^2}{L^2} \dots\dots\dots(2.4)$$

$N_s^2$  是 Brunt-Vaisala 頻率。 $L, D$  和  $U_0$  是特徵水平，垂直和風速尺度。 $f_0$  是在緯度  $\phi_0$  的柯氏參數。 $a$  是地球的半徑， $L_c$  是 Internal Rossby radius of deformation，從 (2.4) 我們可以看出  $\beta$  代表地球渦度的梯度。因為我們假設是在平面上，所以  $\beta$  是一個常數。 $S$  則代表大氣

$$\frac{\partial}{\partial t} E(\phi) = - \int_0^{z_T} \int_{-1}^1 dy dz \rho_s \left[ \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\overline{v\theta}}{S} \frac{\partial U}{\partial z} \right] \dots\dots\dots(2.8)$$

$$E(\phi) = \int_0^{z_T} \int_{-1}^1 dy dz \frac{\rho_s}{2} \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{S} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] \dots\dots\dots(2.9)$$

$E(\phi)$  是擾動的總能量。從 (2.9) 我們可以看出  $S$  也是一種動能和位能比值的度量。當  $S > 1$  時，位能比較不重要，而  $S < 1$  時，位能就比較重要。(2.8) 中我們發覺，在沒有外力作用下，基本場要存在有水平或垂直風切，擾動的能量才能隨時間有變化，也就是說基本場要有可用位能或動能可供轉換為擾動的能量。同時我們也看出，擾動必需有特定的結構，能量的轉換才能進行。因為：

$$-\overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} = - \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_\phi \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial U}{\partial y} \dots(2.10)$$

$$+ \frac{1}{S} \overline{v\theta} \frac{\partial U}{\partial z} = - \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)_\phi \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial U}{\partial z} \quad (2.11)$$

( ) $_\phi$  表示是在  $\phi$  等於常數的平面上的變化。從 (2.8), (2.10) 和 (2.11) 我們知道，能量的轉換除了基本場要有風切外，還需要擾動有水平或垂直的相位變化 (phase variation) 才可以進行。圖二是

密度成層的影響，是靜力穩定度的度量。

關於邊界條件，假設在  $y = \pm 1$  的地方有道垂直的牆，因此緯向速度在這裏必需為 0，也就是說：

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, y = \pm 1 \dots\dots\dots(2.5)$$

在下邊界，我們假設它是水平的，所以沒有垂直速度。從熱力方程式，我們可以得到邊界條件：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$$

$$z = 0 \dots\dots\dots(2.6)$$

至於上邊界，我們考慮兩種情況：

(1) 上邊界是一道水平的牆，所以在  $z = z_T$ ，邊界條件與 (2.6) 一樣。

(2) 上邊界在無限遠。因為沒有擾動源在無限遠，能量是由下向上傳送。因此上邊界要滿足輻射條件，

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 dy \overline{\rho w \phi} = 0 \dots\dots\dots(2.7)$$

從控制方程式和邊界條件，我們可以求得擾動的能量方程式。如果 (2.1) 乘以  $\rho_s \phi^*$ ， $\phi^*$  是  $\phi$  的共軛複數，然後進行空間積分，經過一些部分積分運算和利用邊界條件，我們得到：

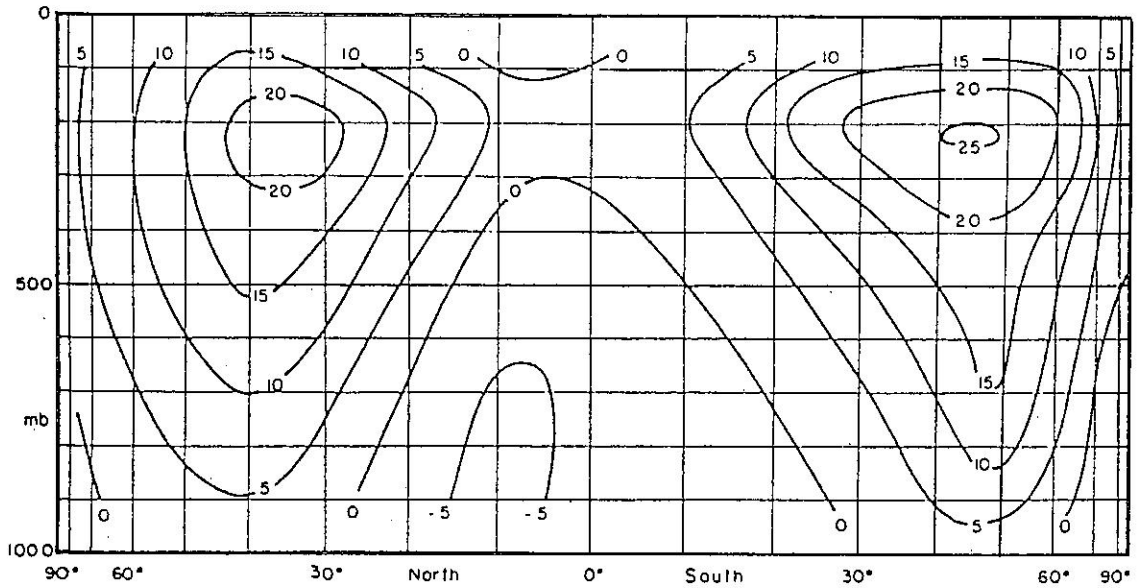
正壓能量轉換的擾動和基本場的關係圖。當基本場的南北風切為正而擾動的相位是隨緯度向西傾斜時，因 (2.10) 為正，所以基本場釋放動能供擾動長大。當擾動的相位向東傾斜時，則擾動提供能量給基本場。

同樣的，當基本場的垂直風切為正時，擾動的相位必需隨高度向西傾斜才能吸收基本場的可用位能而長大。因此不論正壓或斜壓系統，擾動的相位斜率都必需和基本場的風速斜率相反才能產生不穩定。

我們也可用另一種方式求得穩定的條件。假設擾動可以用正模表示為：

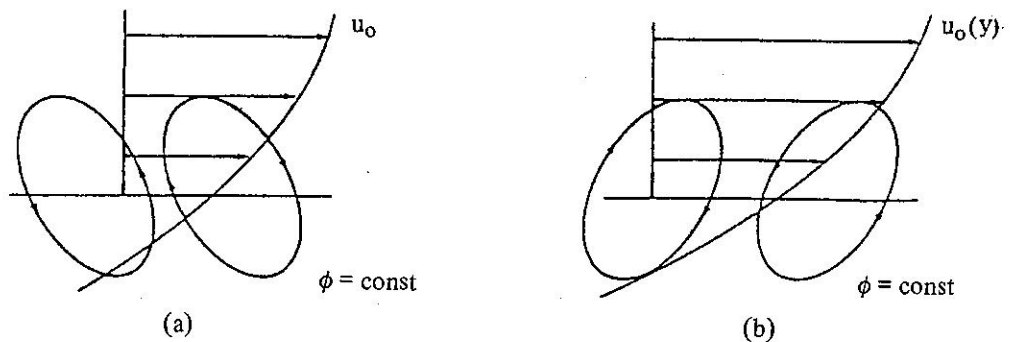
$$\phi = R_0 [\Phi(y, z) e^{i k(x - ct)}] \dots\dots\dots(2.12)$$

$k$  是擾動的經向波數， $c$  是相速，可為複數。當  $c$  的虛部為正時，從 (2.12) 我們知道，擾動呈指數



圖一 平均經向風的剖面圖 (取自: Lorzen 1967)

Figure 1. A cross section of the observed zonal winds, time- and longitude-averaged in northern winter and southern summer conditions. (Reprinted from Lorenz (1967)).



圖二 正壓系統能量轉換過程基本場和擾動的關係圖  
(a)是正壓不穩定的情況；(b)是正壓穩定的情況  
(取自: Pedlosky (1987), 圖7.3.1)

Figure 2. (a) the slope of the perturbation streamlines for a disturbance whose Reynolds stress extracts energy from the horizontal shear of the basic current. Not the impression that the perturbation is "leaning" against the zonal flow so as to decelerate it. (b) The slope of the perturbation streamlines for a disturbance whose Reynolds stress transfers energy from the perturbations to the basic currents. (Taken from Fig. 7.3.1 of Pedlosky (1987)).

性成長。因為任何擾動都可用正模來展開，如果其中有一個正模呈指數性成長時，經過一段時間，這個正模會從展開式中突顯出來。因此在討論不穩定

時，我們通常只需要用單一正模來表示擾動就可以了。

把 (2.12) 代入控制方程式和邊界條件，我們得到：

$$\frac{1}{\rho_s} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\rho_s}{S} \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - k^2 \Phi + \frac{\Phi}{U-c} \frac{\partial \pi_0}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots(2.13)$$

$$\Phi = 0, \quad y = \pm 1 \quad \dots\dots\dots(2.14)$$

$$(U-c) \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial U}{\partial z} \Phi = 0, \quad z = 0 \text{ 和 } z = z_T \quad \dots\dots\dots(2.15)$$

或者：

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \rho_s W \phi dy = 0 \quad z \rightarrow \infty \quad \dots\dots\dots(2.16)$$

和導能量方程式一樣，(2.14) 乘以  $\rho_s \Phi^*$ ，然後對空間積分經過一些運算過程，我們得到：

$$c_1 \left\{ \int_{-1}^1 dy \int_0^{z_T} dz \frac{1}{S} \frac{\rho_s |\Phi|^2}{|U-c|^2} \frac{\partial \pi_0}{\partial y} - \int_{-1}^1 dy \frac{\rho_s}{S} \frac{|\Phi|^2}{|U-c|^2} \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{z=0} + \int_{-1}^1 dy \frac{\rho_s}{S} \frac{|\Phi|^2}{|U-c|^2} \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{z=z_T} \right\} = 0 \quad \dots\dots\dots(2.17)$$

$$\int_{-1}^1 dy \int_0^{z_T} dz \rho_s \frac{|\Phi|^2}{|U-c|^2} (U-c_r) \frac{\partial \pi}{\partial y} - \int_{-1}^1 dy \frac{\rho_s}{S} \frac{|\Phi|^2}{|U-c|^2} \frac{\partial U}{\partial z} (U-c_r) \Big|_{z=0} + \int_{-1}^1 dy \frac{\rho_s}{S} \frac{|\Phi|^2}{|U-c|^2} \frac{\partial U}{\partial z} (U-c_r) \Big|_{z=z_T} = \int_{-1}^1 dy \int_0^{z_T} dz \rho_s \left[ \frac{1}{S} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|^2 + \left| \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|^2 + k^2 |\Phi|^2 \right] > 0 \quad \dots\dots\dots(2.18)$$

(2.17) 和 (2.18) 是運算結果的虛部和實部。當上邊界在無限遠時，(2.17) 和 (2.18) 的上邊界項等於 0。因為我們是在求不穩定的條件，所以  $c_1 \neq 0$ 。從 (2.17) 我們知道，如果擾動是不穩定的，必須要滿足，

- (1) 基本場的位渦梯度， $\frac{\partial \pi_0}{\partial y}$  必需在某些地方變號；或者
- (2) 位渦梯度項可以被邊界項所平衡；或者
- (3) 位渦梯度項為零，而上下邊界項可以互相平衡。

這就是所謂的不穩定的必要條件。當流體為正壓系統時，邊界項為零，因此正壓不穩定的必要條件是基本場的位渦梯度必需要變號。如果是斜壓系統則只要滿足上列三種情況之一就可能產生不穩定。如果我們把基本場的位渦梯度廣義的定義為：

$$\tilde{\pi}_y = \frac{\partial \pi_0}{\partial y} + \delta(z-z_T) \frac{\partial U}{\partial z} - \delta(z) \frac{\partial U}{\partial z} \quad \dots\dots\dots(2.19)$$

$$\delta(x) = 0 \quad x \neq 0$$

$$\delta(x) = 1 \quad x = 0$$

那麼不穩定的必要條件可以很簡潔的表示為：

$$\int_{-1}^1 dy \int_0^{z_T} dz \frac{\rho_s}{S} \frac{|\Phi|^2}{|U-c|^2} \tilde{\pi}_y = 0 \quad \dots\dots\dots(2.20)$$

也就是說  $\tilde{\pi}_y$  一定要在某些地方變號才有可能產生不穩定。

從本節的討論中我們發覺，雖然基本場有可用位能或動能可供轉換，在動力上並不一定可以實現。只有當基本場滿足特定的條件和擾動具有特定的結構，這種能量轉換過程才有可能。另一方面進行我們也發現，除了能量來源不同外，斜壓和正壓不穩定基本上是非常相似的。

### 三、斜壓不穩定

當地球沒有自轉時，等密度面或等溫面受重力作用會與地表平行成層分布。但有自轉運動時，因重力和柯氏力平衡的關係，使得等溫面產生傾斜。因此在水平方向會產生溫度梯度。從熱力風的關係，水平溫度梯度對應於垂直風切，所以大氣有可用

位能可供轉換為擾動的能量，也就是說大氣是處於潛在斜壓不穩定的狀態。

斜壓不穩定的機制可以用氣塊法很簡潔的說明。如圖三所示，當氣塊由A點移動至B點時，因位溫守恒，氣塊的溫度比環境的溫度高，浮力為正，所以會繼續往前移動。當氣塊由A點移至C點時，氣塊的溫度比周圍低，浮力是負的，所以氣塊會被推回A點。由這裏我們可以得知，斜壓不穩定基本上仍是一種熱力不穩定。雖然在垂直方向大氣是處於靜力穩定狀態，但因等溫面是傾斜的，只要氣塊的路徑小於等溫面與地面的交角，仍然可以把基本場的位能轉換為擾動的動能，供擾動長大。

在研究斜壓不穩定問題的文獻中，最常用到的模式有三種：(1) Eady 模式；(2) Charney 模式；和(3)二層模式。其中 Eady 和 Charney 模式是垂直連續性的模式而二層模式是把大氣的垂直結構分成上下二層來表示，各有各的特點。二層模式基本上比較簡單，在各類動力教科書上都有詳細說明，本文就不再介紹。Eady 和 Charney 模式大家比較少接觸。在這節中，我們把這兩個模式的特點和不同假設造成的結果做一些簡單的介紹。

### (1) Eady 模式

Eady (1949) 引介了一個非常簡潔的模式來說明最單純的斜壓不穩定過程。這個模式的基本場如圖四所示，風場不隨緯度改變，垂直風切是常數，密度，靜力穩定度和柯氏參數， $\rho_0$ , S 和 f，也都是常數，所以沒有  $\beta$  作用。從 (2.3) 我們知道基本場的位渦梯度為零。由 (2.17) 我們知道在這種情況下，上邊界不能在無限遠，否則就無法產生不穩定。由 (2.17) 我們，在正模的假設下，Eady 模式的控制方程式和邊界條件是：

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - k^2 \Phi = 0 \quad \dots\dots\dots(3.1)$$

$$\Phi = 0, \quad y = \pm 1 \quad \dots\dots\dots(3.2)$$

$$(z - c) \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \Phi = 0, \quad z = 0, 1 \quad \dots\dots\dots(3.3)$$

(3.1) 是常係數偏微分方程，可以很輕易的用變數分離法把擾動的垂直結構和緯向結構分開。在滿足側邊界條件的情況下， $\Phi$  可以寫成：

$$\Phi = A(z) \cos \left( n + \frac{1}{2} \right) \pi y, \quad n = 0,$$

$$1, 2, \dots\dots \text{整數} \quad \dots\dots\dots(3.4)$$

從 (3.1) 和 (3.3) 我們可以得到 A 的方程式和邊界條件。

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - \mu^2 A = 0 \quad \dots\dots\dots(3.5)$$

$$(z - c) \frac{\partial A}{\partial z} - A = 0, \quad z = 0, 1 \quad \dots\dots\dots(3.6)$$

$$\mu^2 = k^2 + \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 \pi^2$$

$\mu$  是擾動的總波數。

因為基本場沒有位渦梯度，(3.5) 並沒有奇異點 (singularity)，所以 A 的解很簡單，

$$A = a \cosh \mu z + b \sinh \mu z \quad \dots\dots\dots(3.7)$$

這個解必需要滿足上下邊界條件，因此把 (3.7) 代入 (3.6) 我們可以求得相速 C

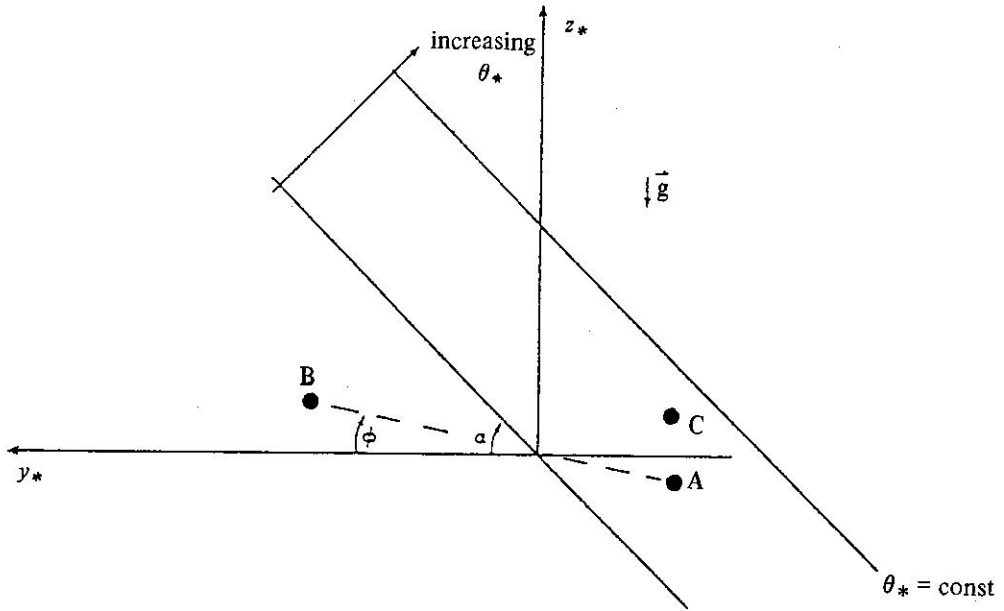
$$c = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{\mu} \left\{ \left( \frac{\mu}{2} - \coth \frac{\mu}{2} \right) \left( \frac{\mu}{2} - \tanh \frac{\mu}{2} \right) \right\}^{1/2} \quad \dots\dots\dots(3.8)$$

當根號裏面為負時，相速 c 是複數，其中一個解虛部是正的，所以擾動會呈指數性成長。圖五是相速和總波數的關係圖。我們可以看到  $c_1$  只有在波數小的時候才不等於零，因此只有長波才不穩定。因為 Eady 模式不穩定的產生是靠基本場的位渦梯度在上下邊界變號，當擾動的水平尺度變小時，擾動不能同時感受到上下邊界的作用，基本場的位能也就無法釋放出來供擾動長大。因此在 Eady 模式中，短波是穩定的。不穩定波的相速， $c_r = 0.5$ ，也就是說不穩定波以基本風場的平均速度移動。穩定波則以接近邊界的基本風場移動。波長越短，波速越接近基本風場在邊界的速度。

圖 6(a) 是擾動的成長率。因為成長率， $\sigma = kc_1$ ，雖然波長越長， $c_1$  越大，成長率的最大值並不在  $k = 0$  處。如果我們用實際大氣的值代入參數  $\phi$ ，最大不穩定的波長約為 4000 km 左右。這個尺度與天氣圖上常見的中緯度系統相當接近。圖 6(b) 則是最不穩定波的垂直結構。擾動的相位隨着高度向西傾斜。從上一節的討論中我們知道，在這種情況下，基本場的可用位能可以轉換為擾動的動能，使擾動長大。擾動的振幅大約對稱於中點，中間小而邊界大，所以擾動的垂直尺度和基本場是一樣的。

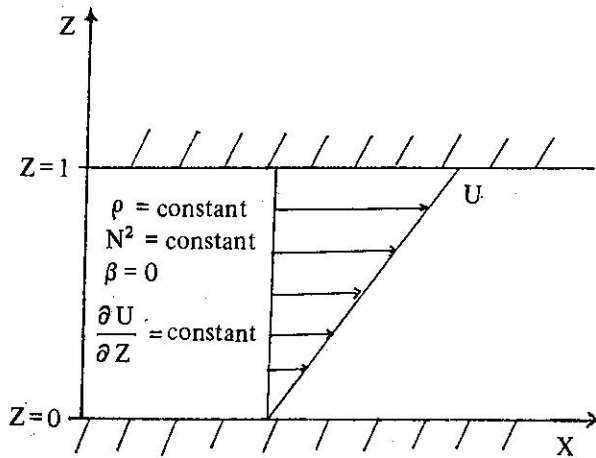
從擾動的解，我們也可以求得擾動的熱通量 (heat flux)，

$$\rho_0 \bar{v} \theta = \frac{kc_1}{2|c|^2} e^{2kc_1 t} \cos^2 \left( n + \frac{1}{2} \right) \pi y \dots\dots\dots(3.9)$$



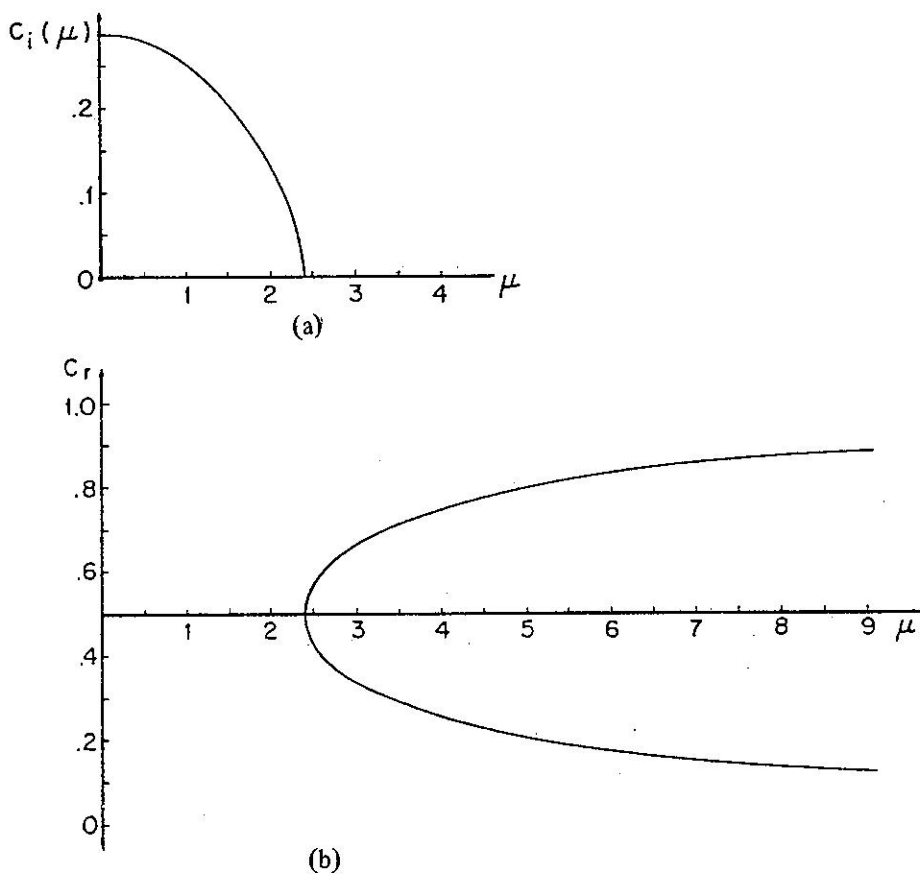
圖三 斜壓不穩定機制的示意圖  
 (取自: Pedlosky (1987), 圖7.6.1)

Figure 3. The slope of the potential-temperature surface with respect to the horizontal opens a “wedge of instability” of angle  $\tan^{-1} (\partial z_*/\partial y_*)\theta_*$ . Fluid trajectories within this wedge (e.g., the motion of element *A* to the position of *B*) will release potential energy, and a fluid element on such a trajectory will be accelerated away from its initial position. (Taken from Fig. 7.6.1 of Pedlosky (1987)).



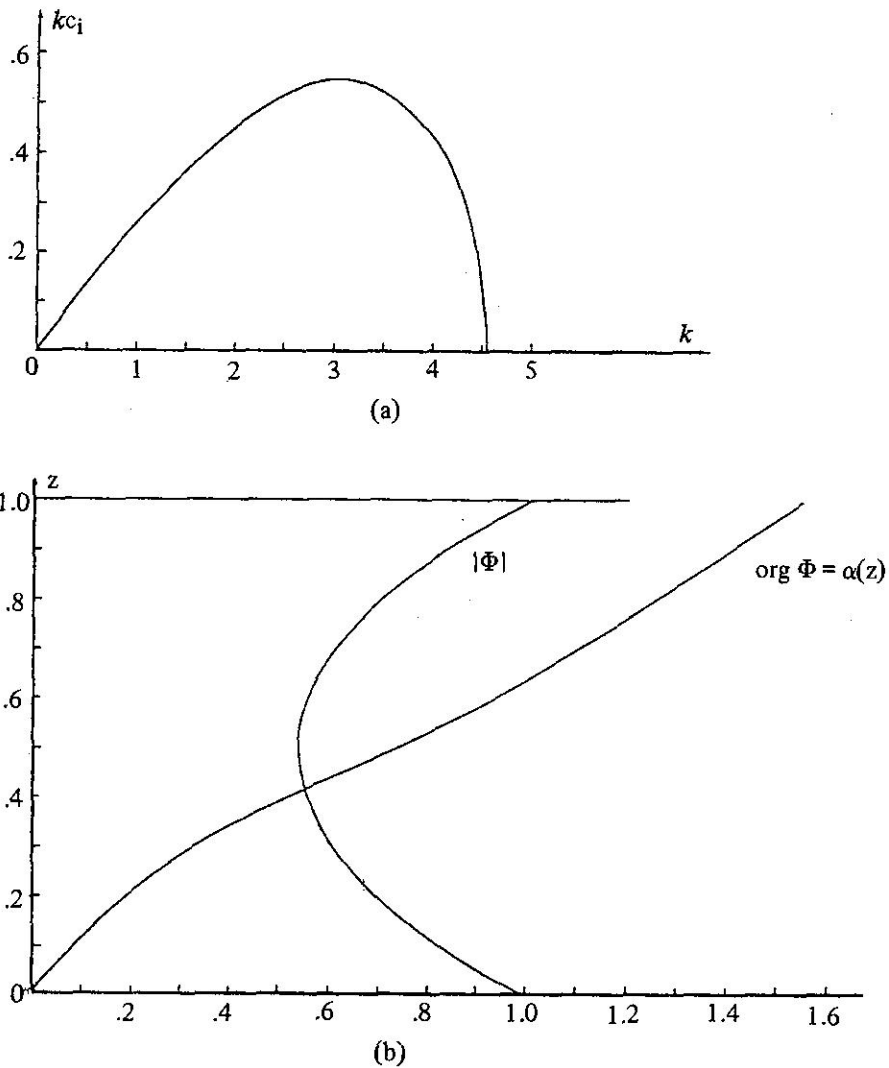
圖四 Eady 模式的基本場

Figure 4. The basic flow of Eady model.



圖五 相速的虛部(a)和實部(b)與擾動波數的關係圖  
(取自：Pedlosky (1987)，圖7.7.1)

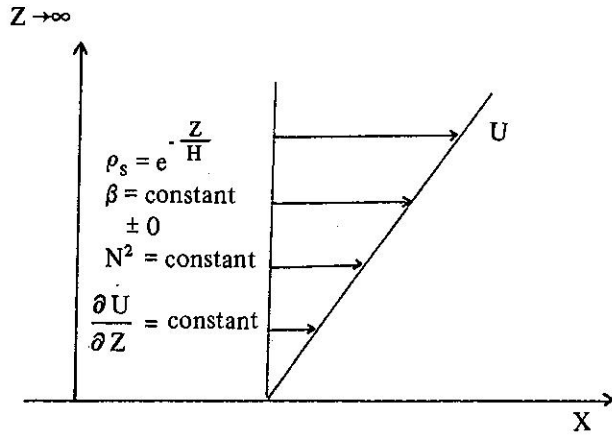
Figure 5. (a) The imaginary part of  $c$ ,  $c_i$ , as function of  $\mu = (k_2^2 + l_n^2)^{1/2} S^{1/2}$ . (b) The real part of  $c$ ,  $c_r$ , as a function of  $\mu$ ; note the coalescence at the critical wave number  $\mu_c$ . (Taken from Fig. 7.7.1 of Pedlosky (1987)).



圖六 (a)擾動的成長率；(b)最不穩波的垂直結構  
(取自：Pedlosky (1987)，圖7.7.2)

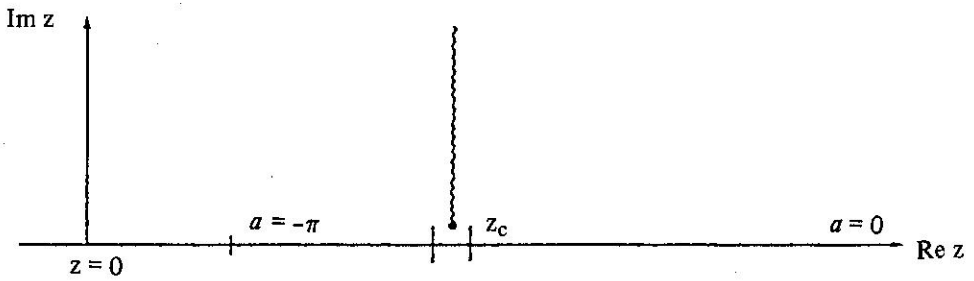
Figure 6. (a) The growth rate,  $kc_i$ , for the most unstable Eady mode, i.e., the mode proportional to  $\cos \frac{1}{2}\pi y$ , with  $S = 0.25$ . (g) The amplitude  $|\Phi|$  and the phase  $\alpha(=)$  as a function of height for the most unstable wave. Note that the increase of  $\alpha$  with  $=$  implies the tilting rearward of the wave with height, which in turn implies the release of potential energy by the disturbance. (Taken from Fig. 7.7.2 of Pedlosky (1987))





圖七 Charney 模式的基本場

Figure 7. The basic flow of Charney model.



圖八 奇異點附近的相位變化圖

(取自：Pedlosky (1987), 圖 7.8.1)

Figure 8. The singularity of the stability equation in the complex  $Z$  - plane is at the point  $Z_c$ , which lies slightly above the real axis if  $c_i > 0$ . (Taken from Fig. 7.8.1 of Pedlosky (1987)).

當擾動是不穩定時，熱通量是正的，也就是說斜壓不穩定波會往極地傳送熱量。因為在 Eady 模式中，基本場不隨緯度變化，擾動也沒有緯向的相位變化，因此擾動的動量通量為零。

從這簡短的介紹中我們知道，雖然 Eady 模式非常的簡單和理想化，仍然顯示了斜壓不穩定的基本特性。而不穩定波的結構也與實際的中緯度天氣系統有相當的對應關係。如果想要對這個模式有進一步的了解，請參考 Pedlosky (1987)。

## (2) Charney 模式

Charney 模式的基本場如圖七所示。它與 Eady 不同點在於  $\beta$  不等零而且  $\rho$  是隨高度呈指數性遞減，因此基本場的位渦梯度不等於零。從不穩定的必要條件我們知道，當位渦梯度不為零時，上邊界在無限遠仍可以產生不穩定。在滿足側邊界條件下，擾動垂直結構的控制方程式和邊界條件如下：

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - \frac{1}{H} \frac{\partial A}{\partial z} - \mu^2 A + \frac{A}{z-c} (\beta S + \frac{1}{H}) = 0 \dots\dots\dots(3.10)$$

$$c \frac{\partial A}{\partial z} + A = 0 \quad z = 0 \dots\dots\dots(3.11)$$

$$A = \text{定值} \quad z \rightarrow \infty \dots\dots\dots(3.12)$$

$\mu$  的定義和在 Eady 模式中一樣，H 是 scale height。

因為位渦梯度不為零，(3.10) 有奇異點存在。我們通常稱這奇異點附近的區域為臨界層 (critical layer)。奇異點或臨界層的存在有很重要的物理意義。當方程式有奇異點時，通解會有對數項 (log term)。因為對數項有分歧點 (branch point)，擾動的相位在臨界層會有很劇烈的變化，如圖八所示。相位的變化造成基本場的可用位能轉換為擾動的動能，使擾動成長。

一般而言，當方程式有奇異點時，我們可以用 Frobenius 方法求得通解。或者我們可以把 (3.10) 轉換為 confluent hypergeometric 方程式，然後查書求得它的通解。但這些是通解都很複雜，代入邊界條件時，我們無法得到相速  $c$  和擾動波數之間明顯的關係，因此必需用數值方法來解。圖九是 Kuo (1973) 計算出的擾動相速的實部和虛部與波數的關係。我們發覺 Charney 模式沒有短波穩定的現象。幾乎所有的波都是不穩定

的，只有特定的幾個波是中性的。這是 Charney 模式與 Eady 模式非常不同的一點。利用這種特性，我們可以用短波近似或者對中性點展開方式求得 (3.10) 的近似解析解，這些近似解有助於我們對於 Charney 模式的斜壓不穩定波的結構有比較深入的了解。如果有興趣深入了解這兩種方法，請參閱 Branscome (1983)。

圖十是 Charney 模式中最不穩定波的振幅和相位。我們可以看到，振幅在地表最大，然後呈近似指數性的隨高度遞減。相位的變化也是集中於下層，在上層幾乎沒有變化。這種結構與 Eady 模式的結果很不相同。這是因為 Charney 模式的上邊界在無限遠，因此不會像 Eady 模式一樣在上邊界振幅有極大值。另一方面，基本場位渦梯度的存在也使得擾動可以自己選擇垂直尺度而不必受限於基本場的垂直尺度。因為不穩定的條件只要下邊界與流體內部有交互作用就可以滿足了。從氣塊運動的觀點來看，當擾動的水平尺度減小時，垂直尺度也跟着減小，只要運動方向與地面角維持小於等溫面與地面的交角就可以產生不穩定，所以在 Charney 模式中幾乎所有的波都是不穩定的。

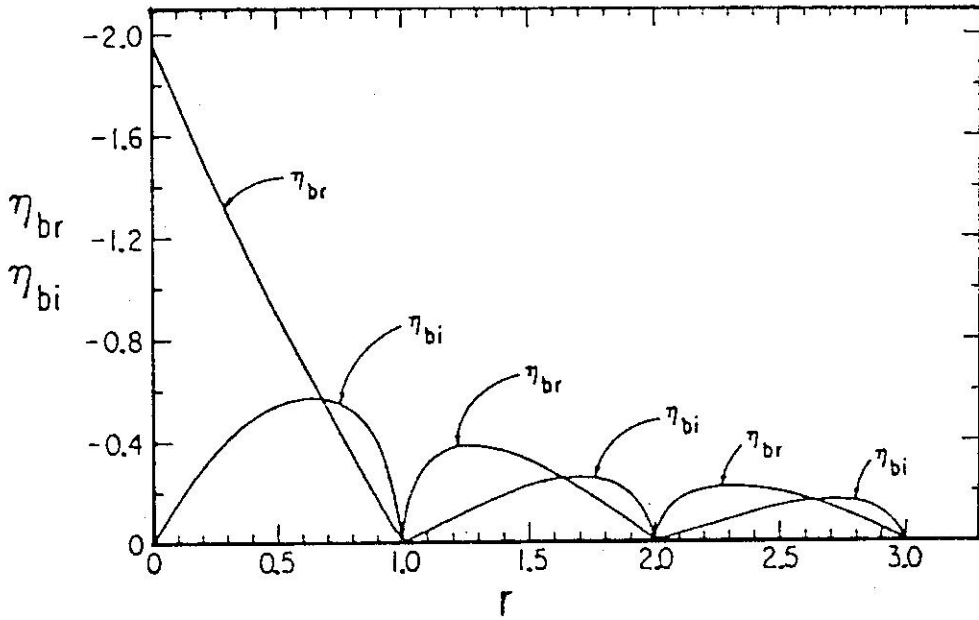
和 Eady 模式比較，Charney 模式的基本場和結果都更符合實際大氣的情況。然而基本場位渦梯度的存在，使得 Charney 模式比 Eady 模式更難用解析方法來求解，這是非常可惜的。

Eady 和 Charney 模式可說是研究斜壓不穩定問題的原型模式。他們在垂直方向是連續的，比較接近實際大氣情況。Eady 模式的優點在於它的簡單易解，我們比較可以了解問題的來龍去脈，而其缺點是有固定的上邊界和忽略  $\beta$  作用，這是非常不符合實際的。Charney 模式正好補足 Eady 模式的缺點，然而它的解析解却不是那麼容易可以求得，在了解上也比較不是那麼容易，但仍然比用數值模式更容易掌握問題的核心所在。因此被廣泛的應用於理論方面的研究。

斜壓不穩定與中緯度的波動有很密切的關係。Eady 和 Charney 模式是理想化的中緯度大氣模式，我們可以利用這兩種模式來研究中緯度有關的天氣現象，找出原因和影響因素。對於現象的了解和掌握有很大的幫助。

## 四、正壓不穩定

斜壓不穩定是因為基本場有溫度梯度，也就定



圖九 相速和擾動波數的關係圖  
(取自：Pedlosky (1987), 圖7.8.4)

Figure 9. The real and imaginary parts of  $c$  as calculated by Kuo (1973) for the case  $\delta \rightarrow 0$ . In this figure  $\eta_{br} = \text{Re } \zeta_0$ ,  $\eta_{bi} = \text{Im } \zeta_0$ , where  $\zeta_0 = -2\mu c$  where  $\mu$  is the non-dimensional wave number. (Taken from Fig. 7.8.4 of Pedlosky (1987)).

$$\eta_{br} = \text{Re } \zeta_0, \quad \zeta_{bi} = \text{Im } \zeta_0$$

有可用位能可供轉換為擾動的動能所產生的現象。正壓不穩定則是因為基本場有水平風切，有可用動能可以轉換為擾動的動能所產生的現象。從第二節中我們發覺除了能量來源不同外，基本上這兩種不穩定非常的類似。在本節中，我們更會發現到，經過適當的簡化，正壓不穩定的問題可以化成幾乎和 Charney 模式一樣。本節主要是參考 Lindzen et. al. (1983)，有興趣者可以閱讀這篇文章。

當基本風場只有水平風切時，我們可以用分離變數法把 (2.13) 分成一個擾動的水平結構方程式和一個垂直方程式。擾動的水平結構方程式可寫成：

$$\frac{d^2 A}{dy^2} - \mu^2 A + \frac{A}{\bar{U}(y) - c} \left( \beta - \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} \right) = 0 \dots\dots (4.1)$$

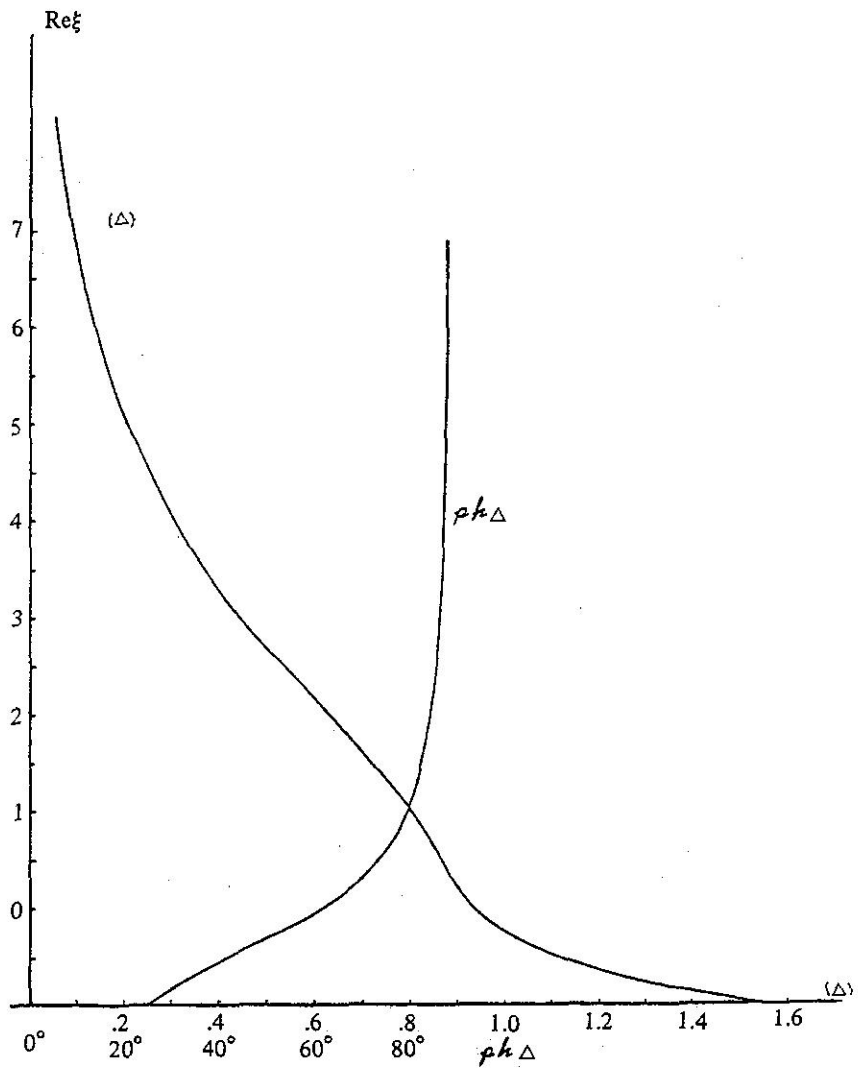
$$\mu^2 = k^2 + \lambda^2$$

在這裏  $\lambda$  是垂直方向的波數。對純正壓系統而言， $\lambda$  等於零。我們可以假設南北方向有固定邊界或者

考慮系統是在一個無限的  $\beta$  平面上。在這些邊界緯向速度， $v$  等於零。除了邊界條件更簡單外，正壓不穩定的方程式和斜壓不穩定的方程式非常相似。

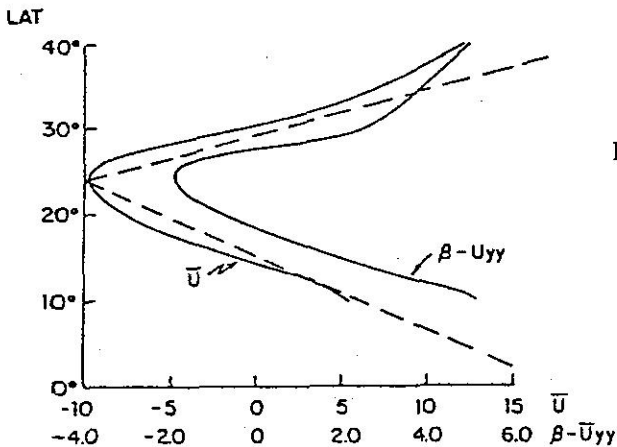
從第二節中，我們知道不穩定的條件是  $\beta - \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2}$  必需在某些地方變號。因為  $\beta$  是正的，基本場的風切梯度必需在某些地方大於  $\beta$  才有可能產生正壓不穩定。因此  $\beta$  有抑制不穩定產生的作用。又從 (2.4) 我們發現， $\beta$  與特徵水平尺度成正比，所以當水平尺度小時容易產生不穩定。西風噴流的風切梯度為負而東風噴流的風切梯度為正，因此在東風噴流附近比較會產生正壓不穩定的現象。

一般而言，正壓不穩定的問題都是用數值方法求解。Lindzen et. al. (1983) 把問題經過適當處理，使我們可以應用 Charney 模式的方法來求得正壓不穩定問題的解。圖十一是 500 mb 平均風場的特性。我們用對稱於中心的線性風場來表示這種東風噴流，



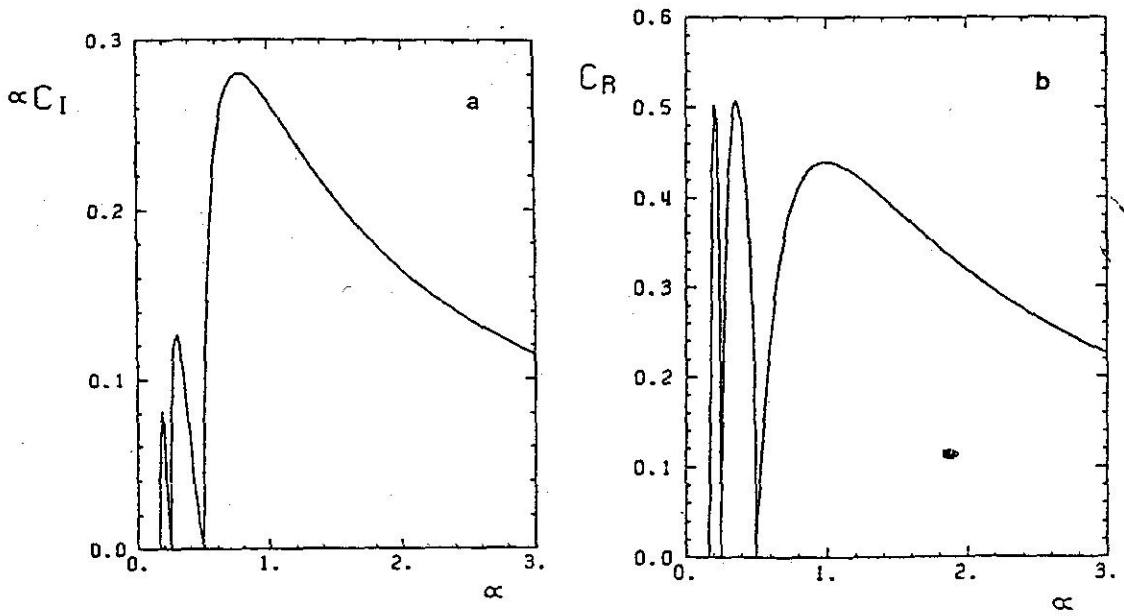
圖十 Charney 模式最不穩定波的垂直結構 (取自: Pedlosky (1987), 圖 7.8.5)

Figure 10. The amplitude and phase of the most unstable mode, i.e., at  $r = 0.5$ . (Taken from Fig. 7.8.5 of Pedlosky (1987)).



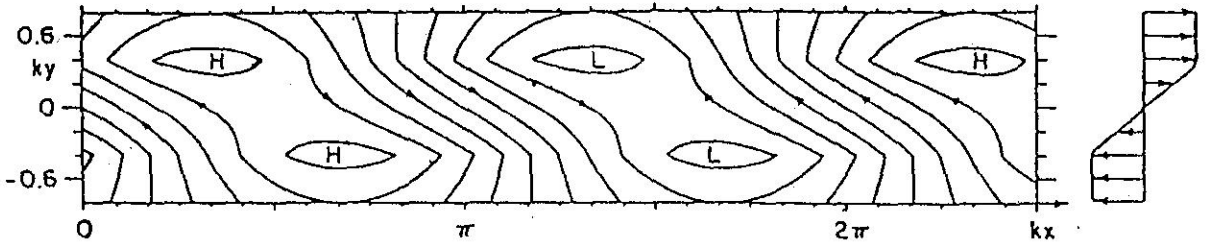
圖十一 500mb 的平均風場的特性 (取自: Lindzon et. al. (1983), 圖一)

Figure 11. Properties of a zonal flow at 500 mb that is characteristic of the troposphere in July. The solid lines show the observed zonal with  $\bar{u}$  and the potential vorticity gradient  $\beta - u_{yy}$  versus latitude. The dashed curve shows an approximation to  $\bar{u}$  used in the calculations. (Taken from Fig. 1 of Lindzen et. al. (1983)).



圖十二 Lindzen 模式求出的擾動成長率和相速 (取自: Lindzen et. al. (1983), 圖三)

Figure 12. Nondimensional growth rate  $\alpha \bar{c}_i$  and phase speed  $\bar{c}_r$  versus horizontal wavenumber  $\alpha$  for the broken-line representation of a symmetric easterly jet illustrated by the solid line in Fig. 2. (Taken from Fig. 3 of Lindzen et. al. (1983)).



圖十三 Split-line 平均風場和最不穩定波的流線圖 (取自: Gill (1982), 圖13.7)

Figure 13. Perturbation geopotential (or perturbation pressure) for the most unstable disturbance to the split-line velocity profile shown at the right. The tilt of the phase lines is such that it is correlated with  $-v$ , i.e., if  $y$  points northward, eastward momentum is carried southward and westward momentum is carried northward. (Taken from Fig. 13.7 of Gill (1982)).

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 + my, \quad y > 0 \\ &= u_0 - my, \quad y < 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.2)$$

$y = 0$  是噴流中心， $u_0$  是常數。

邊界條件只要擾動的振幅在無限遠不是無限大就可以了。從(4.1)和(4.2)， $y > 0$  的控制方程式可寫成：

$$\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \left[ \frac{\beta}{U_0 + my - c} - \mu^2 \right] A = 0 \dots(4.3)$$

在  $y = 0$  的地方， $A$  必需是連續的，我們對 (4.1) 做積分可以得到：

$$\frac{\partial A^+}{\partial y} - \frac{m}{u_0 - c} A = \frac{\partial A^-}{\partial y} + \frac{m}{U_0 - c} A, \quad y = 0 \dots\dots\dots(4.4)$$

正負號表示在  $y = 0^+$  或  $0^-$  值。因為對稱的關係：

$$A(y) = A(-y), \quad \frac{\partial A^+}{\partial y} = -\frac{\partial A^-}{\partial y}$$

(4.4) 變成：

$$\frac{\partial A^+}{\partial y} - \frac{m}{u_0 - c} A^+ = 0 \quad y = 0 \dots\dots\dots(4.5)$$

(4.3) (4.5) 加上無限遠的邊界條件與 Charney 模式完全一樣。我們就可以利用 Charney 模式的解法來求得正壓不穩定問題的解。圖十二是擾動的成長率和相速。我們可以看出他們和 Charney 模式非常的類似。只有特定的波長是中性的，其他都是不穩定的。

圖十三是另一種基本風場和它伴隨的最不穩定正壓波的流線圖。就像在第二節所提到的，當風切為正時，正壓不穩定波的相位隨緯度向西傾斜，這表示基本場的動能轉換為擾動的動能，使擾動不穩定。

從數學的觀點來看，正壓和斜壓不穩定是非常類似的，從能量的觀點來看，正壓不穩定是動能的轉換機制而斜壓不穩定則是能的轉換。在尺度上，這兩種不穩定也有所不同。在(2.2)和(2.3)中，我們看到垂直度化項都與靜力穩定度， $S$ ，有關。當  $S$  很小時，垂直變化的影響比較重要，所以屬於斜壓系統。從(2.4)我們發現  $S$  是內羅士培度形尺度和特徵水平尺度， $L_D$  和  $L$  的比值，因此斜壓不穩定的水平尺度要大於或等於  $L_D$ 。當  $S$  很大時，垂直變化不重要，屬於正壓系統。所以正壓不穩定的水平尺度要小於  $L_D$ 。

實際大氣中，低緯度地區比較接近正壓系統也

比較容易符合正壓不穩定的條件。因此正壓不穩定與低緯度的波動比較有密切的關係。

## 五、結 論

平均大氣是處於潛在的斜壓和正壓不穩定狀態。斜壓不穩定與中緯度的波動有很密切的關係而正壓不穩定則與低緯度的波動比較有關。本文對於這兩種大尺度的不穩定理論和模式做一些簡單的介紹。從中我們可以看出，基本場有可用位能或動能並不一定可以轉換為擾動的能量。擾動必需具有特定的結構才能使能量的轉換過程得以進行。而從位渦動力上看來，基本場的位渦梯度必需要在某些地方變號，不穩定才有可能產生。從能量來看，斜壓和正壓不穩定各有不同的能量來源和具有不同尺度。但從數學上看來，這兩種不穩定基本上是非常類似的。

本文所介紹的都是非常理想化的情況，實際大氣當然沒有那麼簡單。一般而言，平均大氣垂直和水平風均都有，因此斜壓和正壓過程是混在一起的。另外，在這裏我們所討論的都是擾動的振幅是無限小的情況，在擾動初期是沒有問題。當擾動長到某種程度時，非線性作用就會有明顯的影響，因此線性假設就不成立而結果當然也就不適用了。近幾年來，研究重心有一部分轉移至用初始值問題來探討不穩定現象，結果與一些實際的天氣現象相當符合。目前這方面的理論仍在繼續發展中，尚沒有定論。

## 參 考 文 獻

- Branscome, L. E., 1983: The Charney stability problem: approximate solution and modal structures. *J. Atmos Sci.*, 40, 1393-1409.
- Charney, J. G., 1947: The dynamics of long waves in a baroclinic westerly current. *J. Meteor.*, 4, 135-162.
- Eady, E. T., 1949: Long Waves and cyclone waves. *Tellus*, 1, 33-52.
- Gill, A. E., 1982: *Atmosphere-Ocean Dynamics* Academic Press, 662pp.
- Kuo, H.-L., 1973: Dynamics of Quasi-geostrophic flows and instability theory. *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 13, Academic Press, 247-330.

Lindzen, R. S., A. J. Rosenthal and B. Farrel, 1983: Charney's Problem for Baroclinic Instability Applied to Barotropic Instability. *J. Atmos. Sci.*, 40, 1029-1034.

Pedlosky, J., 1987: *Geophysical Fluid Dynamics*, Second edition. Springer-Verlag, 710pp.

## An Introduction to the Theory of Baroclinic and Barotropic Instability

*Yung-An Lee*

Atmospheric Research & Development Center, C. W. B.

### ABSTRACT

This is a brief introduction to the theory of baroclinic and barotropic instability. From energy equation and potential vorticity dynamics, we discuss the condition for instability. In baroclinic instability section, we introduce Eady and Charney models, discuss the similarities and differences between these two models. In barotropic instability section, we introduce Lindzen model. From this model, we note similarities and differences between barotropic and baroclinic instability.