美國中央氣象局數值預報模式

劉　廣　英　編　譯

Operational Numerical Prediction Models at the National Meteorological Center

John D. Stackpoie 原著

I、緒　　言(1)：

大氣物理特性可以六個方程式表之。此六式包括牛頓運動定律

$$\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{1}{m}\Sigma\vec{F} \cdots\cdots (1.1)$$

之 u，v，w 三分量式。及由熱力學導出之位溫方程

$$\frac{d\theta}{dt}=H+C \cdots\cdots (1.2)$$

此式說明大氣之位溫 θ，僅當受到某種形式的加熱 H，或冷却 C之作用時才會改變。另外兩個方程式則分別爲物質不滅，及水（汽）不滅。對大氣而言，卽爲

$$\frac{dM}{dt}=0 \cdots\cdots (1.3)$$

$$\frac{dq}{dt}=0 \cdots\cdots (1.4)$$

式中 M 爲（乾）空氣質量，q 則爲比濕。式 (1.3) 可化爲連續方程。

以上六式都是物理上的基本方程式，就氣象而言，均正確有餘而實用不足。就如式 (1.1)，僅當我們確定式中的 $\vec{F}$ 後，它才能表示出氣象意義來。同時，以上諸式均包含全導數 $\frac{d}{dt}$，此種拉格蘭氏表示法 (Lagrangian)，在數學上代表的是：在括號內全量中某種量的個別時間變量。這種表示法必須先轉換爲奧勒氏表示法 (Eulerian)，方能易於以計算機求解。說起來我們很够幸運，二者間的轉換極爲簡便，其法如下：

$$\frac{d}{dt}(\ \ )=\frac{\partial}{\partial t}(\ \ )+\vec{V}\cdot\vec{\nabla}(\ \ ) \cdots\cdots (1.5)$$

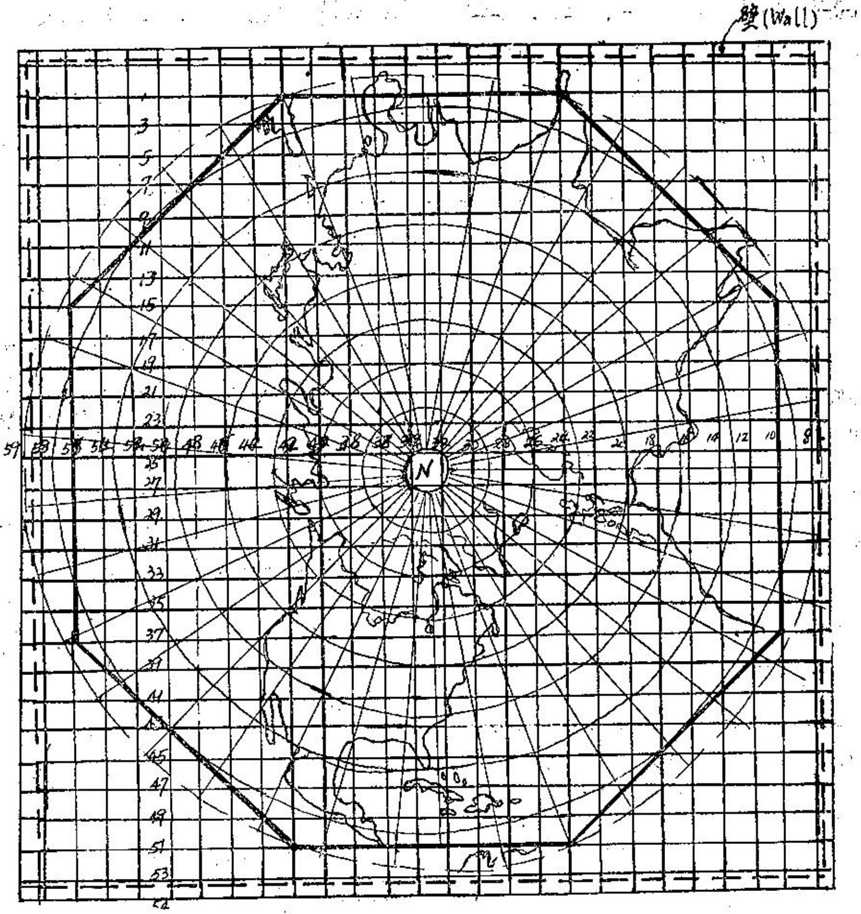
上式中 $\vec{V}$ 及 $\vec{\nabla}$ 分別爲三度空間之速度與梯度運算子 (gradient operator)，而式中右邊兩項則分別代表局部（固定於空間）時間變量，及平流項。

其次，由於所有六個方程式均爲以拉格蘭氏法表示之數學式（向量或純量式），此顯示該等數學式可用於任何慣性座標系。但在實用上我們已先轉換了剛示的方法，爲了求得在某定點上之局部變量，勢需選用一定的座標系統，而此系統又必須與地球相關連，以利吾人工作。

在數學上來說，由一固定於宇宙中任意點，而且適用於式 (1.1) 之直交座標系，轉換爲在我們地球上可做數值預報之直交座標系，是一件很繁複的工作，因而我們在此將此轉換過程略而不述，僅將實用座標說明之。

在美國通用之天氣圖，係採用 p-s (Polar-stereographic) 投影。在此圖上用以標定網格點 (grid point) 之座標有兩種，其中之一乃繪於該投影圖上之 x-y 直交座標。參閱圖（一）。當吾人使用此種座標時，由於同一網格距所涵蓋之經度數，因緯度不同而異，必須在前述諸方程式中引入一地圖因子 (map factor) m。此地圖因子爲緯度之函數。另外一種座標系，乃逕以 p-s 投影圖上之經緯度爲座標軸。此一座標系，在用於半球或全球天氣預報時，所取網格距爲 2.5°，而在用於局部精細網格模式 (Limited-area fine mesh model，以下簡稱 LFM 模式)時，所取網格距則爲 1.25°。很顯然的，由於地表曲率之影響，此網格距所涵蓋之實際距離，亦隨網格點在地球上之位置而異。將網格距縮小，就理論上講可使預報更精確，此時我們所用以運算之定差方程式更接近原來之微分方程式，但由於觀測站不足，使我們必須選用適當之網格距。尤有進者，吾人僅將網格距縮小二分之一，計算時間卽增爲原來之八倍，亦使吾人難以將距離任意縮小。

在實用上，所有預報模式均假定大氣保持靜力平衡（除非在發展中積雲或雷雨雲等强對流區域，此一假設可謂相當正確），亦卽將牛頓運動方程之垂直分量式，簡化爲 $\frac{dw}{dt}=0$。如此不僅可將運算式子化簡，更可將大氣中運動速度快，不易掌握，但並不影響天氣之聲波濾去，而減少計算時之困難及誤差。



圖(一) 六層PE數值天氣預報模式網格圖

最後，為了便於變換垂直座標軸所表示的量，我們特選用菲利浦(Phillips)的σ以代替常見的Z或P為垂直軸。$\sigma = \frac{p}{p_*}$，p 任意高度之氣壓，P_* 為地表面氣壓。

II、基本方程式：

設 u，v 為相對（對地球）風速之水平分量，m為所用天氣圖之地圖因子，而（MAP）則為因使用此種天氣圖而特有之量（我們所列的式子同時適用於P-S 投影圖上之 x-y 直交網格及以經緯度為準之網格，對此兩種網格而言，m 與（MAP）不相同）。

以 σ 為垂直座標軸時，風之 u，v 分量趨勢之方程式為

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\dot{\sigma}\frac{\partial u}{\partial \sigma}+m\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial t}\right)-fv$$
$$+m\left(\frac{\partial gz}{\partial x}+C_p\partial\frac{\partial \pi}{\partial x}\right)+(MAP)_x+F_Y$$
$$-0 \cdots\cdots\cdots (21)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\dot{\sigma}\frac{\partial v}{\partial \sigma}+m\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)+fu$$
$$+m\left(\frac{\partial gz}{\partial y}+C_p\theta\frac{\partial \pi}{\partial y}\right)+(MAP)_y+F_y$$
$$=0 \cdots\cdots\cdots (2.2)$$

靜力方程為

$$\frac{\partial gz}{\partial \sigma}+C_p\theta\frac{\partial \pi}{\partial \sigma}=0 \cdots\cdots\cdots (2.3)$$

以上三式即經靜力修訂後之牛頓運動方程（x.
σ. t 座標）。式中 $\dot{\sigma}=\frac{d\sigma}{dt}$，表示在此任意座標中之垂直分速，而 $\dot{\sigma}\frac{\partial u}{\partial \sigma}$ 即代表 u 之垂直平流項。
時，式中之 θ，C_p 及 $f\equiv 2\Omega\sin\phi$，gz 分別代表
溫，定壓比熱，柯氏參變數及重力位。$\overrightarrow{Fx}$及$\overrightarrow{Fy}$ 為
擦力在 x 及 y 方向之分力，而 π 則為艾思納（E
ner）函數，其定義為

$$\pi=(P/1000)^{R/C_p} \cdots\cdots\cdots (24$$

應用此函數，我們可寫成

$T=\pi\theta$

同時，可將水平氣壓梯度力項，及靜力方程（實即垂直氣壓梯度力項）分別寫成

$$\frac{\partial gz}{\partial x}+C_p\theta\frac{\partial \pi}{\partial x}$$

及 $g\partial z=-\alpha\partial p$

以上二表示法均為以氣壓 P 為垂直座標軸，即$\sigma=P$時之表示法。

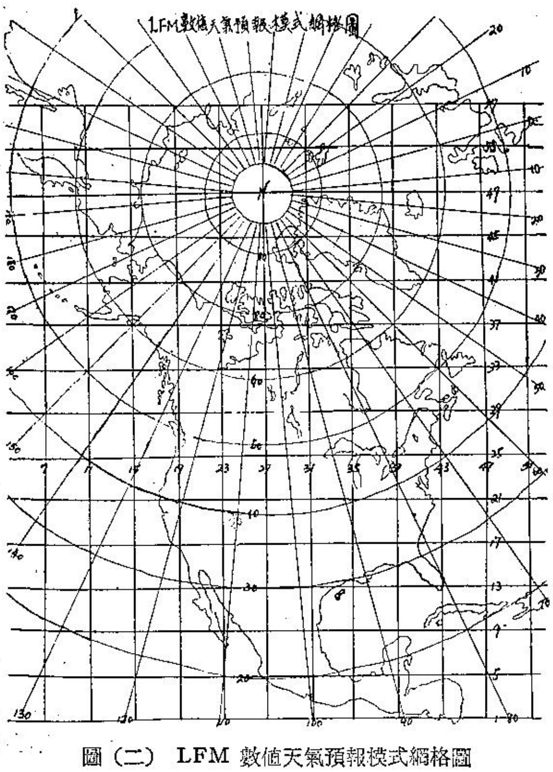
前述三式中之 m，$(MAP)_x$ 及 $(MAP)_y$，以及微分距 dx 和 dy，所代表之量因所用投影圖而異。在 P-S 投影圖而言，m 為投影圖上二幾何點距離，與在地球上該二點實測距離之比。在以經緯度為座標軸之球面座標而言，則 m=1。

至於 $(MAP)_x$ 及 $(MAP)_y$，包括地圖因子之諸微分項，在 P-S 座標系中可毫無問題的引入計算程式之中，但在球面座標而言，如 r 為地球半徑，

$$(MAP)_x=-\frac{uu}{r}\tan\phi,$$

$$(MAP)_y=\frac{u^2}{r}\tan\phi$$

很顯然的當 ϕ 趨於 90° 時二量均趨於無限大，這是運算程式中所不容許的現象——大氣運動通過極點時我們該怎麼辦？仍係一未完全解決之問題。



圖（二） LFM 數値天氣預報模式網格圖

最後再看微分距 dx 及 dy。在 P-S 圖上之直交座標系中，dx 為圖（一）及圖（二）中自左至右（即與 u 同方向）之距離，dy 則為由上至下（即與 v 反向）之距離。在球面座標中，則 $dx=\gamma\cos\phi d\lambda$，其中 λ 表經度。此量以東向為正。而 $dy=\gamma d\lambda$ 是以北向為正。此時 $u(=\gamma\cos\phi\frac{d\lambda}{dt})$，$v(=\gamma\frac{d\phi}{dt})$ 以代表西及南風為正值。

以下再將另外三方程式轉換為適於新座標系之形式。

位溫趨勢方程。

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+\dot{\sigma}\frac{\partial\theta}{\partial\sigma}+m(u\frac{\partial\theta}{\partial x}+v\frac{\partial\theta}{\partial y})+H=0 \quad \cdots\cdots(25)$$

連續方程：

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial p}{\partial\sigma})+\frac{\partial}{\partial\sigma}(\dot{\sigma}\frac{\partial p}{\partial\sigma})+m(\frac{\partial}{\partial x}u\frac{\partial p}{\partial\sigma}+\frac{\partial}{\partial y}v\frac{\partial p}{\partial\sigma})+(MAP)_p=0 \quad \cdots\cdots(26)$$

比濕趨勢方程：

$$\frac{\partial q}{\partial t}+\dot{\sigma}\frac{\partial q}{\partial\sigma}+m(u\frac{\partial q}{\partial x}+v\frac{\partial q}{\partial y})+P=0 \quad \cdots\cdots(2.7)$$

在連續方程中，除已知之地圖因子 m 外，亦包括（MAP）項，此項在 P-S 座標中乃 m 之微分項，而在球面座標則為

$$(MAP)_p=-\frac{v}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial\sigma}\tan\phi$$

很顯然的，由於式中包括 $\tan\phi$，在極點上就不能直接使用。大家對於這種以 σ 座標表示之連續方程也許不太熟習，但如以壓力 P 代替任意座標 σ，即可將此式轉換為常見之形式。

在位溫趨勢方程中之H項，包括所有加熱或冷却作用，而連續方程中之 p 則包括全部降水及蒸發。在天氣預報上來說，這些都是很重要的因素，以後還要進一步討論。

至此我們已將預報所需之五個基本方程式轉為任意座標，移項後即得（以括號代表造成時間變量諸相關空間變量）

$$\frac{\partial u}{\partial t}=(\qquad)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=(\qquad)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=(\qquad)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial p}{\partial \sigma}\right)=(\qquad\qquad)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t}=(\qquad\qquad)$$

根據以上諸式，我們只要將諸式右邊括號內各項之量求出來，而後乘以時距 Δt，即可得到在此時距內某一量之變化量，而後將此變量加至該量之原有值上，就可求得預報值；再以此預報值爲原有值，並重複以上步驟，則應可預報所需某一時間之預報。此一方式稱爲時間外推法，是預報之基本法則。究竟在諸式右邊括號內我們要知道那些量才能計算同式左邊之變量呢？歸納起來不外

$$\dot{\sigma}，u，v，z，\theta，\pi，\frac{\partial p}{\partial \sigma}，q$$

即對每一網格點而言，需先知道以上8個量，方能談到預報。在此8種量中，u，v，θ，$\frac{\partial p}{q\sigma}$，及P爲前一個時距之預報值，而Z及 π 可由流體靜力方程，式(2.3)，及 π 之定義，式(2.4)，求得。至於 σ 則可選爲

$\sigma=Z$　　直角座標系

$\sigma=\theta$　　等熵座標系

$\sigma=\pi$

或其他可用之量。

美國中央氣象局現用之主要預報模式爲PE模式(Primitive Equation Model)，在此模式中 σ 即另有定義，而非定爲 Z，θ，或π。

至此我們已有了基本概念，以下討論數種實用模式。

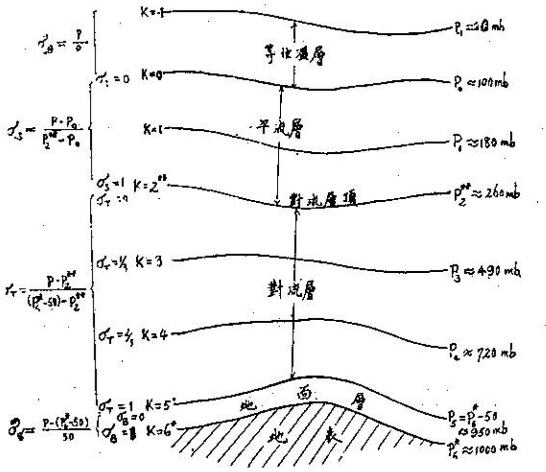
Ⅲ、六層PE模式及LFM模式：

本段中將以討論 PE 模式爲主，其中包括六層 PE 模式，LFM 模式，並兼及半球 PE 模式。所謂 LFM (Limited-area fine mesh) 模式亦爲 PE 模式，僅所涵蓋之區域大小，及所用邊界條件不同而已。但半球 PE 模式（八層）與 PE 模式差異就比較大，待以後提到時再加以比較。

在PE模式中，

$$\sigma=\frac{p-p_U}{p_L-p_U}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3.1)$$

式中 p_U 及 p_L 分別代表上下兩層之氣壓。所謂六層PE模式，則先將大氣自對流層頂分開爲對流層及平流層。在對流層內將 $\sigma_T=0$ ($p=p_U\equiv p^{**}$; p^{**}；爲對流層頂之氣壓）與 $\sigma_T=1$ ($p=p\equiv p^*$; p^* 爲地面氣壓）之間分爲三層，分界面爲 $\sigma_T=1/3$ 與 $\sigma_T=2/3$。而在平流層中則分爲兩層，分界面爲 $\sigma_S=1/2$。另加一地面層，此層自地面起，厚 50mb。除此六層外尚有一等位溫層（θ=常數），此層由 $p=p_0$（p_0=平流層頂氣壓）至 $p_U=0$（外太空）。參閱圖（三）。所加之第七層僅爲計算方便，並不含氣象效用。



圖（三） 六層PE暨LFM數値天氣預報模式垂直結構圖

至於如何將六層之PE模式改進爲8層，目前尚未成定案。在實驗中所用的是將平流層增加一層，即分爲三層，而後又在原有地面層之上，再加－50mb厚度之「邊界層」。另外亦將試驗對流層分爲五層，而其他各層不變之情況，實驗後再決定選用那種分法。

由以上之敍述，吾人應可了解，選用 σ 爲垂直座標軸，可使地面及對流層頂很容易地保留在預報模式之中——使用 σ 爲垂直座標，可使我們由眞正的地面開始計算覆在其上之大氣中的變化，同時亦可使對流層頂成爲一個眞正沒有空氣流過（$\dot{\sigma}=0$）之分界面，這些均非其他座標系所可辦得到者。當然，在實際大氣中，對流層頂並非眞爲 $\dot{\sigma}=0$，但其值甚小，計算時可略而不計。

分層（6或8層）後，我們即可在各層中解各預報方程——即以(2.1)、(2.2)，(2.5)及(2.6)諸式分別計算 u，v，θ，及$\frac{\partial p}{\partial \sigma}$。此四種量，均以時間外推方式，一步步計算，在計算中所需要之其他量（如計算u時吾人需要$\frac{\partial gz}{\partial x}$，而爲了求$\frac{\partial gz}{\partial x}$，吾人又需要先計算 Z），則可由(2.3)，(2.4)及(2.7)式中求得。這當然是極爲繁複的事，但在實用中，吾人可將比濕q單獨處理，如此即可僅用七個方程式中的四個

，分別計算某一層之平均風，平均溫度及平均氣壓厚度。由此四基本量，即可進而求得某一氣壓面之預報量：風，高度、溫度、垂直速度，及渦旋度。

至此吾人已知如何計算所需之預報量，但並不瞭解 PE 模式之特性為何。簡言之，PE 模式之最大特性，即在運動方程式中保有$\vec{F}_x$，$\vec{F}_y$ 項，而在計算位溫之方程式中保有 H 一項，這使吾人具有充份自由，將可能影響天氣之物理作用引入方程式中。以下謹將為 PE 模式所包容之物理量分條陳述之。

Ⅲ-1. PE 模式所包容之物理量：

一、摩擦力：

摩擦力對大氣流動具有阻滯作用，其大小與風速成正比，而與空氣流道之寬度成反比。作用在單位面積上，在 u，v 方向之阻滯力可以下二式示之：

$$\tau_x = -\mu_x \frac{\partial u}{\partial z} \quad \cdots\cdots(3.2)$$

$$\tau_y = -\mu_y \frac{\partial v}{\partial z} \quad \cdots\cdots(3.3)$$

式中 μ_x 及 μ_y 為空氣黏滯係數在 x y 二方向之分量。如以單位質量計之，則以上二分力即吾人所需要之$\vec{F}_x$及$\vec{F}_y$，亦即

$$\left.\begin{aligned}\vec{F}_x &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_x}{\partial z}\\ \vec{F}_y &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_y}{\partial z}\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(3.4)$$

克雷斯曼 (Cressman)[2]註明

$$\mu_x = \frac{C_D|\vec{V}|u}{\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial z}}, \quad \mu_y = \frac{C_D|\vec{V}|v}{\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial z}} \quad \cdots(3.5)$$

將式 (3.2)，(3.3)，及 (3.5) 代入 (3.4) 並運用 $\rho g dz = -dp$，即可得

$$\left.\begin{aligned}\vec{F}_x &= C_D\frac{\rho g}{\Delta p}|\vec{V}|u\\ \vec{F}_y &= C_D\frac{\rho g}{\Delta p}|\vec{V}|v\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(3.6)$$

在計算$\vec{F}_x$及$\vec{F}_y$時，吾人可假設在Δp區間內密度ρ為常數。在 PE 模式中，$\Delta p = 50mb$ 即地面層之厚度。$\vec{V}(u，v)$ 則使用地面觀測值，如地面無風則以地面層中之預測風速代之。至於 C_D 值則引用克氏原文中所求得之數值。

二、H 項：

此項中又包括三種作用：

1. 潛熱：設在一時距 Δt 中有 δm 質量之水汽凝結成降水，則放出之潛熱即為（設 L為水之凝結熱）：

$$\delta Q = L\delta m \quad \cdots\cdots(3.7)$$

在二 σ 面間，單位面積上空氣柱中所含空氣質量為$\frac{p_\sigma}{g}$($p_\sigma = \frac{\partial p}{\partial \sigma}$)，則放出 δQ 之熱量可使此空氣柱增加溫度

$$\delta T = \frac{\delta Q}{C_p p_\sigma / g} \quad \cdots\cdots(3.8)$$

在上式中代入 $T=\pi\theta$，即得

$$\delta\theta = \frac{Lg}{C_p}\frac{\delta m}{\pi p_\sigma} \quad \cdots\cdots(3.9)$$

蒸發而導至之冷却作用亦包括在 PE 模式之中。在下節中吾人將討論降水預報，由該討論可知，吾人假設水汽僅含於模式之最低三層中，加熱作用僅在水汽達到飽和發生凝結作用之層中計算。如果此凝結之水落入一未飽和層，即發生蒸發作用，則此層需計算冷却作用。此一計算仍用 (3.9) 式，僅將 δm以負值代入即可。

2. 輻射：談到輻射作用，大家難免想到那些繁雜的公式。老實說這是一般從事氣象工作者最弱的一環。在此地我們就避開該等方程式，而直接將實用原則寫出來。

輻射又包括短波（太陽）輻射及長波輻射。

太陽常數為 2.0cal/cm²min ，此一輻射量中計算 7%之散射損失，其餘的進入模式最低三層。進入最低三層之太陽輻射，部份為水汽所吸收，並造成水汽所在區之加熱現象 ，再剩餘者方達於地面 。達於地面之輻射在地面有 90%被反射，僅餘 10%可使地面層並進而使該層空氣加溫。如該區域為海面或雪地則反射可達 100%，即無輻射能直接使地面層加溫。當天空有雲時，如雲在中對流層、低對流層，或地面層，則將到達地面之輻射量分別降低 50% ，75%或100%。如兩層或以上均有雲，則假定該區到達地面之太陽輻射量為零。

長波輻射方面問題較短波更繁難，因大氣對短波只具吸收作用，但對長波則具有吸收及再輻射的能力。因而在 PE 模式中，對長波輻射之處理，採用極武斷的方式——如天空無雲（相對濕度低於60%）各層冷却率均計為 1.5°C/天。如天空有雲則自雲存在層起以下諸層冷却率均為零。尤有進者，如在碧空情況下地面有積雪，則該區域之地面層另加每天 1.5°C 之冷却。很顯然的，這種處理輻射的方法有待研討改進。在發展中之八層 PE 模式中，整個輻射問題將有所改進，以使計算方法不這麼武斷而又呆板。

3. 可感熱 (Sensible heat)：由於空氣平流作用而形成之局部加溫或冷却作用，亦爲吾人必須考慮者。在PE模式中，當冷空氣流經暖海流上時，其加溫率計爲 $10^{-4}\Delta\theta°/$秒，此時 $\Delta\theta$ 爲地面層與海面溫度之差。

4. 對流修正：空氣之上下運動亦爲造成加溫或冷却之原因。在模式中吾人如發現某一網格點上某一層中空氣未飽和，則比較其相鄰上下二層之位溫，比較結果如爲上層位溫低於下層者（條件性不穩定，在實際大氣中可發生對流），則將兩層位溫作對流修正，其方法爲將上層加溫下層冷却，直至二層位溫相同。此一乾對流修正需包括全部六層。

如某一網格點上某一層中空氣已達飽和，則將該區降溫率與濕絕熱線比較，比較結果如爲條件性不穩定，則作對流修正。由於吾人限定僅地面層及最低兩層中含水汽，故此種濕對流修正僅包括最低四層間之比較。

Ⅲ-2, 降水預報：

美國中央氣象局經過漫長實驗之結果證明，預報降水最有效之方法，不是一層層地計算比濕，如式(2.7)所示，而是預測整個對流層中的平均濕度。至一九六九年十月二十八日後，該局決定在PE模式中選用此一構想，卽僅計算各層中平均含水量，而不直接計算比濕 q。其計算公式之推導如後：

以 q 乘 (2.6) 式，再以 $p_\sigma\left(=\frac{\partial p}{\partial \sigma}\right)$ 乘 (2.7) 式，略去 P，而後相加並除以 g，卽得（以向量式表之，並省略地圖因子）

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{qp_\sigma}{g}\right)+\nabla\cdot\left(\frac{qp_\sigma}{g}\vec{V}\right)+\frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{qp_\sigma}{g}\dot{\sigma}\right)=0 \quad\cdots\cdots(3.10)$$

設 ρ_W 爲水汽密度，而比濕 $q=\rho_W/\rho$（ρ 爲空氣密度），則降水之定義爲

$$W=\int_0^\infty \rho q dz$$

或由流體靜力方程之轉換，得

$$W=-\int_{p^*}^{0}\frac{q}{g}dp$$

式中 p^* 爲地面 (Z＝0) 之氣壓。

再由式 (3.1) σ 之定義可得

$$\partial p=p_\sigma d\sigma$$

$$\therefore\quad W=-\int_{\sigma^*}^{\sigma_{-1}}\frac{qp_\sigma}{g}d\sigma \quad\cdots\cdots(3.11)$$

式中 σ^* 爲地面之 σ 值，σ_{-1} 爲模式頂端之 σ 值。

在 (3.11) 式中之積分子，qp_σ/g，實卽 (3.10) 式可計算之量（與2.6式相比可知，式3.10乃 qp_σ/g 之連續方程），故將式 (3.10) 對 σ 積分，卽可得到 W 之趨勢方程式，

$$\frac{\partial W}{\partial t}+\nabla\cdot W\vec{V}+\left[\frac{qp_\sigma}{g}\dot{\sigma}\right]_L-\left[\frac{qp_\sigma}{g}\dot{\sigma}\right]_U=0 \quad\cdots\cdots(3.12)$$

式中註脚 L 及 U 表示低層及上層之量。由此式固可求得 $\left[\frac{qp_\sigma}{g}\dot{\sigma}\right]$ 之垂直運送量，但勢需先求 q 值。在PE 模式中吾人假定 $q=\frac{wg}{p_\sigma\Delta\sigma}$，並假定在各層中，q 與氣壓成直線關係。由此等假設 q 之垂直變化卽可由鄰近層之 W 值求得，進而可由式 (3.12) 預報大氣中可降水含量。取飽和條件下之可降水量，W_S，卽可預報實際降水量。

$$W_S=-\int_{\sigma_A}^{\sigma_B}\frac{q_S p_\sigma}{g}d\sigma \quad\cdots\cdots(3.13)$$

W_S 卽在 σ_A 及 σ_B 二層間之飽和可降水含量 (Saturation precipitable water)。式中飽和比濕 q_s 爲

$$q_s=0.622\frac{e_s}{p-0.375e_s}$$

$$e_s=6.1078\mathrm{EXP}\left[\frac{17.26T}{T+237.3}\right],\quad T\ \ °C,\quad e_s\ \ mb$$

當吾人求得某層中 W_S 之後卽與該層中之 W 相比較。如 W 值大於 W_S，則多餘之水 $(W-W_S)$ 卽由該層降落至下層，而由水汽凝結放出之潛熱則加入該層；如 W 值小於 W_S，則該層無水降落，亦無放熱加溫。

當上層降水落入次層中後，如該層亦爲飽和，且其 $W>W_S$，則降水總量爲二層之和；如該層未飽和，則部份降水蒸發，直至使此層中 $W=W_S$，此時同時產生冷却作用。此種過程在含水諸層中重複進行，直至地面爲止。

除以上計算外，吾人亦由測定某處之條件性不穩定，對總降水量做對流性降水修正。此一降水修正於一九七〇年八月開始使用時，並不計算由對流凝結所形成之加熱作用，使用後發現有些時候會造成模式最初條件 (initial condition) 之不穩定，因而在實用上在第一小時預報中不做此修正，卽最初一小時對流性降水不包括在十二小時總降水量之中。

在此模式中，由於水面乃水汽之主要來源，所有海面上（未冰凍者），各網格點上空含水層中之 W，均以不少於 $0.3W_s$ 計算，如發現某含水層中 W<

$0.3W_s$，則逕自以 $W=0.3W_s$ 計算之，此可視爲海面蒸發作用。當然，陸地上亦有湖沼區，但並未計及。實際上，降水預測仍爲本模式最弱的一環，有待改進之處尚多。

Ⅲ-3. PE 模式資料輸入：

本模式預報各 σ 層間之天氣變量，故第一步工作即爲由觀測報告中各定壓層轉換爲定 σ 層。由圖(三)知，在定訂各 σ 層時，吾人首先需求得地面氣壓 p^*，對流層頂氣壓 p^{**}，及平流層頂氣壓 p_0。由 p^* 即可求得地面層頂之氣壓（p^*-50mb）。p^{**} 係直接經由分析高空圖而得，而 p^* 係由地面高度 z^*（已知），及分析 850mb 及 700mb，而後利用流體靜力方程計算而得。

平流層頂氣壓 p_0 之計算較繁。計算此值需預估大氣之總高度，對流層頂高度及氣壓，以及等位溫層之位溫。

已知以上諸氣壓值，則可完全訂定吾人所需之 σ 座標，進而可訂定各 p_σ 之高度及位溫 θ。在地面層而言，θ 之計算與其他各層略有不同。如地面高度在850mb 以下，此層位溫係用地面與第一層高空圖(850mb) 內差法求得。如此地面層在 850mb 以上，則 θ 之計算與其他各層相同，因此時地面高度大，溫度分析即難正確。

當溫度訂定之後，必須作靜力穩定校正，以校正由分析或內插過程所造成之錯誤。

至此在吾人所需五個天氣變量 u，v，p_σ，w，θ 中已有其二。其餘風分速之最初值，先係利用平衡方程 (balance equation) 計算而得，但目前已改爲直接利用高空分析圖中的觀測值。觀測值需先除去由於觀測錯誤或小尺度作用影響而生之輻散作用，以求得無輻散風場。如不經此轉換，則吾人或將遇到與李査遜一九二二年首作數値預報時之相同結果。

當然，將風場轉換爲無輻散風場之結果，使 PE 模式失去了預報垂直風的能力。同時，大氣中實際風場在每個十二小時時距中並不會變成無輻散風場。因而以無輻散風場爲預報起始條件或有不當，補救之道乃先由平衡方程求最初風場，取出其中所含之輻散部份，而後計算垂直風場，再將此垂直風場加入由實測風場求得之無輻散風場，用此一複合式風場作爲預報初值效果極佳。

當 u，v，θ，p_σ 等預報初值決定之後，我們採用一極直接的方式訂定 W 之最初值：計算各層之飽和可降水含量，而後以相對濕度（各層採用同一數值）乘之。

至於 LFM 之預報初值選定，與前述之 PE 模式者略有出入，即 LFM 仍用平衡方程求最初風場，同時最初濕度亦用各 σ 層之分析值，而不採用平均值。PE 模式亦將採用此種計算濕度的方法，以代替目前之平均值法。

Ⅲ-4. PE 模式之輸出：

輸出之計算結束，首先需由 σ 座標轉換回 p 座標，由於計算結果中僅含各 σ 層之 u，v，及 θ，而不明含壓力 p，故吾人需由各層之平均 π 值，求與 π 相關之 p 值，並假定各層中變數均可由直線關係自 σ 座標轉換至 p 座標。譬如吾人欲求 500mb 等壓面上之風分速 u，先由附圖（三）中找到 500mb 等壓面係在對流層頂以下二 σ 層中心（平均 π 值）之中央，而後計算此二層間 u 對 π 之斜率，再以此斜率乘 500mb 至二層中任一層之 π 差值，所得之積加於該層之 u 值上，即爲 500mb 之 u 值。此一內插爲由 σ 層轉換爲定壓面之一般法則，唯一例外乃此法則不適用於通過對流層頂。譬如吾人欲求 250mb 等壓面之風，我們並不選用對流層頂上下二層作內插，而係選用對流層頂以上二層。同理，如求 300mb 之風速，則取對流層頂以下二層，蓋對流層頂爲高低空大氣分界，應視同一不連續面。

Ⅲ-5. PE 模式之邊界條件：

任何未包括全球之預報模式，均需選用邊界條件。六層 PE 模式之邊界如圖（一）粗線所示。此一邊界需遠離預報區，或影響天氣變化甚大之區域，否則將使預報發生嚴重錯誤。就以局部精細網格模式而言，吾人即難以硬性置一界限在邊界上，因此一界限將切過噴射氣流（參閱圖（二）），造成惡劣後果。在此種局部模式中，吾人以「固定邊界」方法，解決邊界問題。在此法中，所有在邊界上之預報初值，在預報時距內（三十六小時），一直保持不變。就美國地區實用結果而言，效果尚佳，但新的研究仍不斷發展中，以求得更佳解決邊界條件之方法。

至於半球模式的邊界問題就簡單的多了。在此模式中，僅赤道爲唯一邊界。吾人假定赤道兩側之天氣因素成對稱狀況，並假定在赤道上 v=0，則邊界問題即可順利解決。

最後所要談的就是預報時距問題了。按 $C\frac{\Delta t}{\Delta x}<$

1[3]之穩定條件，如預報網格距，dx，縮短，預報時距，dt，即需以同一比例縮小。在 PE 模式中，dt＝10分鐘，而在 LFM 模式中，因 dx 為 PE 模式之半，故 dt 僅為 5 分鐘，亦即使預報所需計算時間加長。在此，大家當可發現，以球面經緯度為網格線之模式中，極區中 dx 漸趨於零，使預報難以進行，解決之道仍待研究。

Ⅳ、其他輔助模式：

除 PE 模式外，美國中央氣象局其他模式均為過濾（filtered）或似地轉風形式者。所謂過濾乃將大氣中重力波自渦旋率趨勢或其他運算方程中濾去，因而可在較長預報時間中，仍滿足 CFL[4] 之運算穩定條件。

過濾後之運算方程較全式簡單的多，因而使預報運算時間縮短（在同條件下，約較 PE 模式節省 3/4 的時間）。如 m 為地圖因子（同前），渦旋率及輻散可寫成

$$\zeta = m^2\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v}{m}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u}{m}\right)\right] \cdots (4.1)$$

$$D = m^2\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{m}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v}{m}\right)\right] \cdots\cdots (4.2)$$

而渦旋率趨勢方程式，則可由 (2.2) 式對 x 微分後減去 (2.1) 式之對 y 微分式，即

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\zeta + \dot{\sigma}\frac{\partial \zeta}{\partial \sigma} + m\Big[u\frac{\partial}{\partial x}(\zeta+f) \\ &\quad + v\frac{\partial}{\partial y}(\zeta+f) + \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial \sigma} - \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial \sigma} \\ &\quad + C_p\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial \pi}{\partial y} - \frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\partial \pi}{\partial x}\right)\Big] \\ &\quad = -(\zeta+f)D \cdots\cdots (4.3)\end{aligned}$$

同理亦可得到輻散趨勢方程，在此略而不述。

跟據勞蘭玆[5]於 1960 年所提出之原則，並設 $\sigma = p$，ψ 為流函數（stream function），因而

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\zeta = \nabla^2 \psi, \qquad D = 0$$

則經最嚴格過濾後 (4.3) 式即簡化為

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + mJ(\psi, \zeta+f) = 0 \cdots\cdots (4.4)$$

上式為描述正壓（單層）均勻流體之最簡式。

Ⅳ-1. 正壓網格模式 (Barotropic Mesh Model)

前節為從理論上尋求運算公式與實際大氣運動之關係，再經過濾後，可得到如式 (4.4) 般之一組方程式。在實用中，吾人還需從機械作用中找出滿足能量一致性之式子。所謂正壓模式，即根據此原則，在 (4.4) 式中增加兩項，以使之更與實際現象相符合。此加入之項乃 $-H\frac{\partial \psi}{\partial t}$（稱為 Helmholtz 項）及輻散項，前者可避免長波後退現象，而後者則可將地形及摩擦影響加入運算方程之中。如此 (4.4) 式可寫成

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - H\frac{\partial \psi}{\partial t} + mJ(\psi, \zeta+f) - f\frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \cdots\cdots (4.5)$$

式中 ω 為 p 座標中之垂直運動速率。

假定由地形導至之垂直運動至 200mb 高度為止，則 $\frac{\partial \omega}{\partial p}$ 偏微分項可以定差法（finite difference）代替，即

$$\frac{\partial \omega}{\partial p} = \frac{\omega_G}{p_s - 200} = \frac{\omega_M + \omega_F}{p_s - 200} \cdots\cdots (4.6)$$

式中 ω_G 為地面上之垂直速度，ω_M 及 ω_F 則分別為由地形及摩擦作用所導至之垂直速度。

設 $\vec{V}_s$ 為地面水平風速，∇p_s 為地面氣壓梯度，τ_x 及 τ_y 分別為 x 及 y 方向之切力，則可訂定

$$\omega_M = \vec{V}_s \cdot \nabla p_s \cdots\cdots (4.7)$$

$$\omega_F = g/f\left(\frac{\partial \tau_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_y}{\partial y}\right) \cdots\cdots (4.8)$$

由上式知，欲計算 ω_M 及 ω_F 需先求地面（確切言之，乃 1000mb 者）風場，而欲求地面風場則需先預報 850mb 至 500mb 之厚度 h，因

$$\vec{V}_s = \vec{V}_5 - \left(\frac{p_s - 500}{850 - 500}\right)\vec{V}_T \cdots\cdots (4.9)$$

式中 $\vec{V}_T = \frac{g}{f}\hat{k} \times \nabla h$，為 850 至 500mb 之熱力風。

現在吾人所面臨者乃如何預報 h。

由熱力學方程

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \theta + \omega\frac{\partial \theta}{\partial p} = 0$$

並以 $\theta = -\frac{pg}{R\pi}\frac{\partial z}{\partial p}$ 代入上式即得

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial p}\right) + \vec{V} \cdot \nabla\left(\frac{\partial z}{\partial p}\right) - S\omega = 0 \cdots (4.10)$$

式中 $S = -(g\rho\theta)^{-1}\frac{\partial \theta}{\partial p}$，稱為穩定度項，在本模式中視為常數。在預報厚度時，(4.10) 式中 $\omega = 0$，同時假定

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla(h) = 0$$

$$\bar{\vec{V}} = \frac{3}{4}\vec{V}_5$$

而後將 (4.10) 式自 500mb 積分至 850mb，即可得到一高度Z之趨勢方程式。此趨勢方程式分別用於 850mb 及 500mb，則可求得 Z_{850} 及 Z_{500} 之時間變化量，亦即可預報 $h(=Z_{850}-_{500})$ 之時間變化量。

正壓模式雖不能預測氣旋系統之發展（渦旋率增加），但由於大氣多數時間均保持正壓及地轉風狀況，同時此種模式極省時，故美中央氣象局仍保留使用此模式。

IV-2. 李德地面模式 (Red Surface Model)

此模式為將正壓渦旋率公式用於 1000mb，即

$$\frac{\partial}{\partial t}\zeta_0+\vec{V}_0\cdot\nabla(\zeta_0+f)-f\frac{\partial\omega}{\partial p})_0=0\cdots(4.11)$$

式中註脚 0 即表諸相關量在 1000mb 等壓面上之值。

設 $\omega=\omega_0+(\omega_5-\omega_0)[1-(\frac{p-p_5}{p_0-p_5})^2]$

或 $\frac{\partial\omega}{\partial p}=-(\omega_5-\omega_0)[2\frac{p-p_5}{(p_0-p_5)^2}]$

亦即 $\frac{\partial\omega}{\partial p})_0=-2\frac{\omega_5-\omega_0}{p_0-p_5}\cdots\cdots\cdots\cdots(4.12)$

將 (4.12) 代入 (4.12) 式即得

$$\frac{\partial\zeta_0}{\partial t}+\vec{V}_0\cdot\nabla(\zeta_0+f)+\frac{2f}{p_0-p_5}(\omega_5-\omega_0)=0$$

如1 000mb 等壓面上之風為地轉風，$\vec{V}_0=\hat{k}\times\frac{g}{f}\nabla Z$，而 $\omega_0=\vec{V}_0\cdot\nabla p_s$，則上式中僅 ω_5 及 $\frac{\partial\zeta_0}{\partial t}$ 為未知數。求 ω_5 之方法與正壓模式者同（僅積分限為500mb 至 1000mb，與該模式不同），即由積分 (4.10) 式可得

$$\frac{\partial}{\partial t}(Z_5-Z_0)=-\vec{V}_0\cdot\nabla(Z_5-Z_0)+\frac{5(p_0-p_5)}{3}(2\omega_5+\omega_0)\quad\cdots\cdots(4.13)$$

而得再由 (4.12) 式可將 ω_5 求出。

最後需解決者乃 ζ_0 與 Z_0 間之關係。李德模式中認定地面圖之高低壓中心分佈，乃由緯流 (zonal flow) 重疊而來，即

$$Z_0=A(y)+B\,\mathrm{Sin}(\frac{\partial\pi}{L}X)\mathrm{Sin}(\frac{\partial\pi}{L}y)$$

而渦旋率則定為

$$\zeta_0=-\frac{8\pi^2 g}{fL^2}Z_0$$

（注意：此處 $\pi=3.14159\cdots\cdots$，並非前述之艾思納函數）

由以上二式可知，地渦旋率與波長 L 關係極為密切。實驗結果證明，相當於波數 (wave number) 為六之 L 值最為合用。

將所求得之 ω_5 及 ζ_0 代入 (4.13) 式即可預報 (Z_5-Z_0)，並進而預報 1000mb 等壓面高度變化。使用此模式做天氣預報需先做 500mb 預測圖。

IV-3 克雷斯曼三層模式與 ω 方程式：

克氏三層模式僅用於電算機或計算模式有問題之時。此模式亦使用根據勞蘭玆原則過濾後之渦旋率方程式，但簡化程度較正壓模式者為輕。此時吾人將風場分為旋轉 (rotational) 部份

$$\vec{V}_\psi=\hat{k}\times\nabla\psi$$

及輻散 (divergent) 部份

$$\vec{V}=\nabla\chi_\chi$$

由而可得

$$\vec{V}=\vec{V}_\psi+\vec{V}_\chi\ ,\ \zeta=\nabla^2\psi\ ,\ D=\nabla^2\chi$$

式中 χ 為風勢方程。

在 (4.3) 式中，除扭轉 (twisting) 項中用風場之輻散部份外，其他諸項均用風速 $\vec{V}$。同時由連續方程知

$$\nabla^2\chi=-\frac{\partial\omega}{\partial p}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4.14)$$

故式 (4.3) 可化為

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\psi+J(\psi,\nabla^2\psi+f)+\nabla\cdot[(\nabla^2\psi+f)\nabla\chi+\omega\nabla\frac{\partial\psi}{\partial p}=0\cdots\cdots\cdots\cdots(4.15)$$

至此吾人僅有二方程式，却有三未知數 (ψ, χ, ω)，故需另一方程式，方可求解。此一相關方程式可由 (4.11) 熱力方程及 (4.15)式導出之。先取 (4.11) 式之 ∇^2，並假設

$$\zeta=\frac{g}{f}\nabla^2 Z=\nabla^2\psi$$

則可得到一 $\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial}{\partial p}\nabla^2\psi)$ 式。再將 (4.15) 式對 p 微分，亦可導出一 $\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial}{\partial p}\Delta^2\psi)$ 方程式。將此二式合併以省去 $\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial}{\partial p}\nabla^2\psi)$，則得

$$\nabla^2\omega=A\{f\frac{\partial}{\partial p}[\vec{V}\cdot\nabla(\zeta+f)]-\Delta^2(\vec{V}\cdot\nabla\frac{\partial gz}{\partial p})\}\cdots\cdots\cdots\cdots(4.16)$$

上式即 ω 方程式。式中首項稱為渦旋率平流項 (vorticity advection)，次項則為厚度或溫度平流項。此式與 (4.14)，(4.15) 二式即構成一組預報方程式。

吾人用此組方程式計算大氣中天氣變量，並將大氣分爲三層分別計算，故稱爲三層模式。

(4.16) 式中所需之 Z 值係由平衡方程求得，而摩擦及地形所造成之垂直運動，則用正壓模式之方法求得。

V、結　　語：

利用電算機 (computer) 做數值預報，爲今後吾人必走之路[6]，爲此筆者於去（民國六十一）年學業告一段落返國途中，特訪問美中央氣象局，承該局研究發展部門助理主管 D. A. Ships 先生，及 J. D. Stackpole 與 F. Zbar 二博士之盛情接待，又承秘書 L. Lorman夫人代印資料，謹在此致謝。

本文系根據 Stackpole 博士原作編譯，意欲儘量避免過於美國化，因個人學識有限，或有失當之處，尚望學者先進指正。

參　考　資　料

(1) J. D. Stackpole, 1971: Operational prediction models at the National Meteorological Center.

(2) G. P. Cressman, 1960: Improved terrain effects in barotropic forecasts. Monthly Weather Rev., p. 327.

(3) 曲克恭 1973: 定差法解微分方程之誤差。氣象預報與分析，52. p. 1.

(4) S. L. Hess, 1959: Introduction to theoretical meteorology. q.315. (Courant-Friedrichs-Lewy condition)

(5) Lorentz, 1960: Teilu5, p. 364.

(6) 立譯：數値預報淺說。氣象學術季刊，民國四十七年二月號。