應用氣象雷達測定降雨量之近似預估

S. J. Bocks[1] 著　　王　英　世　譯[2]

Approaches to Estimation of Precipitation in the Area of Radar Meteorology

Abstract

In this paper the discussion have been made on the application of weather radar to the estimation of precipitation. Essential to the drawing is the approaches to the reflectivity-precipitation relation and the extension of considerations of precipitation attenuation for radiations of wavelengths exceeding 10cm.

In the tropics, precipitation in excess of 10mm/hr may be regarded as significant. Weather radars which are applied to flood warning in the tropics, bear on the range 10 to 100 mm/hr. The case has usuaully occurred in Taiwan.

According to the method described in this paper, we can estimate the pre-typhoon precipitation with the data collected by weather radar.

本文介紹應用氣象雷達預估在雷達能探測範圍內降雨量之方法。其主要討論內容爲雷達反射率與降雨之關係及雷達輻射波長在十公分以上時之各種情形。

一、引　　言

現在市面上有關敍述氣象雷達的書籍僅有研討應用雷達預先測定降雨之地點及時間者，然而尙無研討有關降雨來臨前之各種情形及雷達波長達二十五公分時對測定降雨之關係。

二、降雨時雨滴大小之分佈

巴坦氏（Battern）建議，降雨時雨滴大小之分佈可應用下式表示：

$$N=N_0e^{-\frac{D}{a}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

式中N之因次可說明如下：

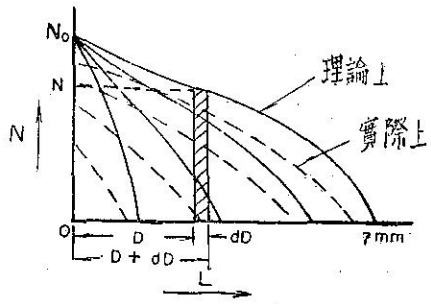

圖　一

圖一中表示空間雨滴粒徑與N之關係，現假設M表示一立方公尺之雨滴總數。

則M（一立方公尺雨滴總數目）＝圖一曲線與軸間包圍之面積。

$$\text{即}M=N\cdot L=\frac{\text{雨滴數目}}{L^3}$$

1. 聯合國「防颱防洪示範計劃」水文氣象專家。
2. 經濟部水資源統一規劃委員會工務員。

$$\therefore N=\frac{\text{雨滴數目}}{L^4}=\frac{1}{L^4}$$

故N • dD 表示空間單位體積內雨滴粒徑在 D 與 D+dD 間之雨滴數目，a 是雨滴參數（drop size parameter）。此觀念把雨滴粒徑超過五公厘以上之數目估計過高，而使雨滴粒徑一公厘左右之數目估計過少，假設最大雨滴粒徑爲七公厘。

雨滴粒徑、降雨强度及雨滴數之關係曲線可表示如圖二。

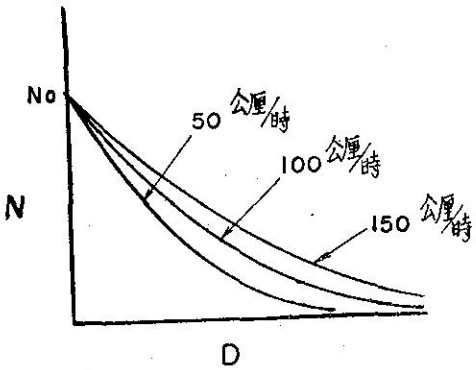

圖 二

即表示降雨强度愈强，同一粒徑之雨滴數目愈多。巴士多氏（Best）則以下式求 N 值。

$$N=\frac{6w}{\pi a^4}\cdot n\cdot x^{n-1}\cdot e^{-x^n}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

式中 $x=\frac{D}{a}$，n 值爲正數，w 表示空間單位體積內液態水之體積。當 n 大於四時雨滴直徑爲零之出現頻率爲零；n 小於四時，則此種雨滴之出現頻率爲無限大。

三、雷達截面及有關之考慮因素

當水球之直徑小於雷達入射輻射波長 λ 之百分之四時，則水球之反射截面（Back-scattering cross section）可用下式表示之：

$$\frac{\pi^5}{\lambda^4}\cdot|K|^2\cdot D^6\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

此式可參閱巴坦氏（Battan）雷達氣象學（參考文獻一）之第二十七頁。吾人可用K表洛忍至參數（(Korentz parameter) $\frac{m^2-1}{m^2+2}$ 之值。m 是目標物質（水或冰）的複合折射指數，可用 n-ik 表之。複合折射指數式中之 n 值是實數， k 是水或冰之吸收係數（Absorption coefficient）。如研討對象爲水，n 及 k 兩者均爲輻射波長及溫度之函數。若研討對象爲冰時，爲實用之目的，複合折射指數式中之 n 值幾與波長及溫度無關，其值約爲 1.78左右。冰之吸收係數受溫度變化之影響甚大，但與波長則幾無相關。冰在溫度 -T°C時，其 k 值可用下式求得。

$$k=2.4\times10^{-3}\times\left\{1-\left(\frac{T}{75.8}\right)^{0.1975}\right\}\cdots\cdots\cdots(4)$$

此式之適用範圍爲 −25°～0°C 間。在起初導演時即得此項結果。

吾人可把上述洛忍至參數用原子擴散潛能之形式表示：

$$K=\frac{m^2-1}{m^2+2}=\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot N^1\rho\cdot e^{-in}\cdots\cdots\cdots(5)$$

式中 N^1 是空間單位體積之原子數，ρ 則表示原子擴散常數（Scattering constant of atoms）。擴散常數依原子之性質及輻射波長之長短而定。n 值表示原子輻射擴散角及入射輻射角之差。吾人可把第(3)式表示空間單位體積之原子密度數及組成原子之擴散常數。在此處，似可引伸其他的相互關係：

得 $n^2-k^2=\varepsilon$； $n^2=\varepsilon\mu>1$；

$$k^2=\varepsilon(\mu-1)\text{；及 }k=\frac{\delta\lambda}{c}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

式中 ε 表示媒介物例如水或冰之電動常數（dielectric constant），μ表示磁動滲透性（Magnetic permeability）。電動常數（dielectric constant）及磁動滲透性（Magnetic permeability），兩者都是波長及溫度之函數。δ 表示水或冰之比傳導性（Specific conductivity），c 表示光在眞空中之速度。電動常數之值見表一。

表一 水的電動常數與波長及溫度之關係

溫度°C \ 波長λ（公分）	23	10	3.21	1.24	0.62
20	83.0	78.5	62.3	29.6	13.0
10	88.0	80.6	54.9	21.3	9.91
0	92.5	78.7	42.6	14.9	7.74

波長小於十公分各值已從甘氏（Gunn）和伊斯特氏（East）所著之圖表中計算出來。從這些數據可推算其他波長及各對應值，例如上表二十三公分下之各值便是。

水之磁動滲透性略大於 1，表二所列水之磁動滲透性與表一所列之項目相同。

輻射波長23公分之滲透性可從輻射波長10公分及

表二　水的磁動滲透性與波長及溫度之關係

溫度°C \ 波長λ(公分)	23	10	3.21	1.24	0.62
20	1.00077	1.0050	1.0642	1.2759	1.5157
10	1.00210	1.0100	1.0847	1.3950	1.5670
0	1.00652	1.0275	1.1959	1.5153	1.5376

3.21 公分計算得來。在相同溫度下，需以 μ-1 之對數值與波長（3.21 至23公分範圍內）存有直線關係爲先決條件。我們可把巴坦氏雷達氣象學之第二十八頁中所列之表引伸，使之含有23公分之輻射值。在表三列有上述數字。其值如下：

表三　輻射波長23公分時水之複合折射指數值(公尺)與溫度之關係

溫　度 °C	20°	10°	0°
n	9.11	9.38	9.62
k	0.253	0.430	0.77
$\|K\|^2$	0.931	0.935	0.939
負k 之虛數部分	0.00191	0.00296	0.00491

其他波長之複合折射指數值與溫度之關係可參閱巴坦氏雷達氣象學之第二十八頁。

我們可把在 0°C 至 20°C 間之 $|K_r|^2$ 值分別用 $k_1(1+e_1)$ 及 $k_1(1-e_1)$ 表之，不同波長之 k_1 及 e_1 值可參閱表四。

表四　當 $|K|^2=k_1(1\pm e_1)$ 時，k_1 及 e_1 在 0°C 至 20°C 之值。

介質：　水

波長(公分)	23	10	3.21	1.24	0.62
k_1	0.935	0.931	0.929	0.912	0.862
誤差 e_1(%)	0.43	0.32	0.13	−0.76	−3.58

在某一限定之溫度內，水之 $|K|^2$ 值是波長的函數，觀上表所列之關係即可確信無訛。上表所列之波長其誤差在 4 %以下。

四、雷達反射率與降雨强度

以某單一的球體爲討論對象，雷達反射率 Z 可用 D^6 表之。降落地面之雨是由不同大小之雨滴所組成，我們可把雷達反射率之定義用下式表之：

$$Z=\int_0^\infty N\cdot D^6\cdot dD \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

（假設所有大小雨滴之分佈可用(1)式表示）

$$=N_0\int_0^\infty D^6 e^{-\frac{D}{a}}\cdot dD=720\cdot N_0\cdot a^7 \cdots\cdots(8)$$

我們雖把雨滴直徑由零積分到無限大，但事實上，天然最大可能雨滴之直徑約爲七公厘。式中負數可使積分所得之值收斂，而使本來很粗略之分析成爲在實際應用上極爲有用之關係式。

我們知道，在空間降雨時，雨滴可被雷達發出的波柱所照明。假設空氣處於靜止狀態之雨滴降落經過空間之末速度爲 V，雨滴直徑爲 D，則雨滴重 $=\frac{\pi}{6}\rho g D^3$，風衝力（wind thrust）$=\frac{\lambda\pi D^2V^2}{4}$，在無加速度之情況下

則　雨滴重＝風衝力

$$\therefore \frac{\pi}{6}\rho g D^3=\frac{\lambda\pi D^2V^2}{4}$$

$$\therefore V=c\sqrt{D}$$

由此關係式可繪成理論上之 V 與 D 之關係曲線如圖三。

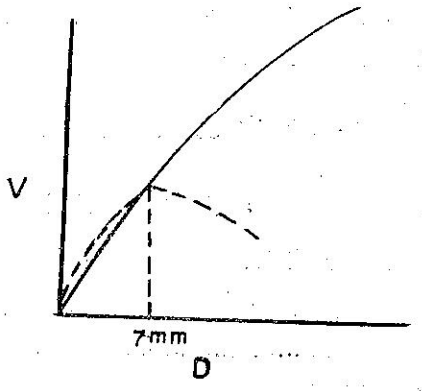

圖　三

圖三中實線爲理論上之關係曲線，虛線則以觀測值繪成的。雨滴直徑在七公厘以前成圓形，超過七公厘則開始變形而分裂。由 $V=c\sqrt{D}$ 之關係式知，雨滴速度與雨滴直徑之平方根成正比。由此可更進一步求得降雨强度與參數 a 之關係式。

R（降雨强度）＝N×（雨滴下降速度）×（雨滴體積）

$$=\frac{1}{L^4}\times\frac{L}{T}\times\frac{L^3}{1}=\frac{1}{T}$$

$$故\ R\left(\frac{L}{T}\right)=\int_0^\infty N\cdot(c\sqrt{D})\cdot\left(\frac{\pi}{6}D^3\right)\cdot dD$$

$$=\int_0^\infty N_0 \cdot e^{-\frac{D}{a}} \cdot c\sqrt{D} \cdot \frac{\pi}{6} D^3 \cdot dD$$

$$=\frac{\pi}{6} c\ N_0 \int_0^\infty e^{-\frac{D}{a}} \cdot D^{3\frac{1}{2}} \cdot dD \cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

令 $\frac{D}{a}=x$ 　　則 $dD=adx$

$$\therefore R=\frac{\pi}{6} cN_0 \int_0^\infty e^{-x}(ax)^{3\frac{1}{2}} adx$$

$$=\frac{\pi}{6} c\ N_0\ a^{4\frac{1}{2}} \int_0^\infty e^{-x} \cdot x^{3\frac{1}{2}} \cdot dx$$

$$\therefore R=\frac{\pi}{6} c\ N_0\ a^{4\frac{1}{2}}\ \Gamma(4\tfrac{1}{2})$$

$$\Gamma(4\tfrac{1}{2})=(4\tfrac{1}{2})(3\tfrac{1}{2})(2\tfrac{1}{2})(1\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2})\sqrt{\pi}$$

$$=\frac{105}{16}\sqrt{\pi}$$

設 $N_0=8\times10^6$ 　　$c=130$

$$\therefore R\ (\text{公尺/秒})=\pi\times\frac{130}{6}\times8\times10^6\times a^{9/2}\times\frac{105}{16}\pi$$

$$=\frac{35}{32}\pi^{3/2}\times130\times(8\times10^6)$$

$$\times\left(\frac{a}{10^3}\right)^{9/2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (10)$$

(a：公厘)

$$R\ (\text{公尺/秒})=R\times10^3\times60^2\ (\text{公厘/時})$$

將(10)式兩邊開9/2乘方

$$\text{則}\ \frac{a}{R^{2/9}}=\left[10^3\times60^2\times\frac{32}{35}\times\frac{10^{27/2}}{\pi^{3/2}\times130\times8\times10^6}\right]^{2/9}$$

$$\therefore R=\frac{R^{2/9}}{4.32}\ (R：\text{公厘/時，}a：\text{公厘})\ \cdots\cdots (11)$$

由(8)、(10)兩式可得

$$Z=720\cdot N_0^{-\frac{5}{9}}\left(\frac{32}{35}\cdot\pi^{-1\frac{1}{2}}\cdot R\cdot c^{-1}\right)^{14/9}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (12)$$

由(11)式可得

$$R=723\ a^{9/2} \qquad (R:\text{公厘時，}a:\text{公厘})$$

此式與巴坦氏 (Battan) 雷達氣象學中之 $a=\frac{1}{\lambda}=\frac{R^{0.21}}{4.1}$ 極爲相近。

又可導得下式：

$$Z\left(\frac{\text{公尺}^6}{\text{公尺}^3}\right)=Z\times10^{-18}\left(\frac{\text{公厘}^6}{\text{公尺}^3}\right)$$

$$=\frac{720}{(8\times10^6)^{5/9}}\cdot\left\{\frac{32}{35}\cdot\frac{R}{\pi^{1\frac{1}{2}}\times130\times10^3\times60^3}\right\}^{14/9}$$

(R:公厘／時)

上式可化爲

$$Z=207R^{14/9}=207R^{1.6}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (13)$$

式中之單位 Z 爲公厘^6/公尺^3，爲 R 公厘/小時。

在熱帶地區降雨强度若超過 10 公厘/小時則極爲重要。故在熱帶地區應用氣象雷達於洪水警告，其應注意之降雨强度範圍爲 10-100 公厘/時。吾人選擇降雨强度 50 公(13)厘/時，爲在熱帶降雨之代表。則由式知，雨滴參數 a 爲 $\frac{50^{0.21}}{4.1}=0.55$公厘。

第(8)、(9)兩式含有 $D^n e^{-\frac{D}{a}}$ 之形式，求 Z 時 n 用 6，求 R 時 n 用 $3\frac{1}{2}$。當積分式已知時，變數 D 與積分之最大相關爲 $D=n\cdot a$。據此我們可得一結論，即最適於估計雷達反射率之有效降雨粒徑爲 $6\times0.55=3.3$公厘，而最不適於估計雨量之粒爲$3.5\times0.55=1.93$公厘。

如我們隨意選擇氣象雷達之波長而不會發生錯誤時，我們即可用雷倫夫氏 (Rayleigh) 之近似法解之。此時，波長可超過理論之邊際值 $\frac{10\times3.3}{4.14}=7.96$公分。

如把輻射波長從 3.21至23公分之範圍及周圍溫度 0°C 至 20°C 之情況稍加留意，則可從表四查出 $|K|^2$ 值之變化在0.9275 ($\lambda=3.21$公分，T=20°C) 到0.939 ($\lambda=23$公分，T=0°C) 之間。若將用表四所列之值，$k_1=0.933$，則誤差 e_1 僅爲0.62%或小於已列在表四各波長與溫度相關之誤差 。因此運用雷倫夫氏之近似法計算，可得正確之結果。我們再把第(3)式化爲：

$$\text{空間單位體積反射截面}=0.933\times\pi^5\times\lambda^{-4}\times Z\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (14)$$

吾人務須切記，在限定之溫度與波長下，極小之雨滴所發生之誤差可略而不計。

五、降雨量依波棒 (Wave band；10公分至23公分) 之大小而遞減

一般書籍中已詳載有關輻射波長在10公分或小於10公分對降雨區逐漸遞減之知識。本文是導演應用波長10公分至23公分可確實用於預估降雨量之知識。

作者撰寫本文曾參閱喜首氏 (Hiser) 及夫來西門氏 (Freseman) 之著作。

巴坦氏 (Battan) 在第四十六頁所示 (a) 從麥氏 (Mie) 近似法導出之總分散水球數與 (b) 用雷倫夫氏近似法計算之總分散數之比值。巴坦氏(Battan) 已把甘氏 (Gunn) 及伊斯特氏 (East) 起被所寫著之部分繪成圖表，吾人稱此比值爲 ϕ。

依巴坦氏（Battan）法，可得$\alpha=\frac{\pi D}{\lambda}$。式中$\alpha<0.3$，$\log\log\phi$ 及 $\log\log\frac{100\alpha}{3}$存有直線相關，可確認無誤。在熱帶地區，暴雨之最大雨滴直徑證實爲七公厘。波長10公分時 $\alpha=0.22$，又波長23公分時 $\alpha=0.096$。由此吾人可得下面的結論，即在這些之範圍內，可得直線相關。

在 18°C 之溫度情況下，波長10公分時，可採用下列之值，$|K|^2=0.9287$，虛數$-k=5.04\times10^{-3}$。在同溫度下，波長 23 公分時，$|K|^2=0.932$，虛數$-k=2.07\times10^{-3}$。

爲實際運用方便計，可寫爲

$$\log_{10}\log_{10}\phi=c+m\log_{10}\log_{10}\frac{\alpha}{0.03}$$

上式適用範圍：(a) 波長＝10公分　$\alpha<0.22$

(b) 波長＝23公分　$\alpha<0.096$

其關係數如下：

λ＝10公分	23公分	
c＝0.1512	0.31	
m＝2.9733	3.17	

波長10公分至23公分之 c，m 值可引伸之。

以下運用之符條仍爲通用之符號。

Q_t(水球總吸收之截面)$=\phi\ (Q_s+Q_a)$，式中

$$Q_s=\frac{2}{3}\pi^5\cdot D^6\lambda^{-4}\ |K|^2$$

$$Q_a=\pi^2\cdot D^2\lambda^{-1}\cdot I_m\ (-k)$$

因此 Q_s 及 Q_a 兩式中都含有 $A\cdot D^n$。如D及λ之單位用公厘，橫斷面用（公厘)^2 表示，則可求得 ϕ, A, D^n 等值，其中 n 值爲 6 或 3。

降雨遞減率 K 受截面因素 ϕ, A, D^n 之影響而增加，可用下式表示：

$$\int_0^{7mm}\phi\ A\ D^n\cdot N_0e^{-\frac{D}{a}}\cdot dD\qquad 單位:(公厘)^{-1}$$

式中 D 爲公厘　$N_0=8\times10^{-6}$（公厘)$^{-4}$，上式之積分式乘以 4.3429×10^6 則可把單位化爲分貝/公里。係數 4.3429 即爲$10\log_{10}e$ 之值。

設降雨强度爲 R，則可誘導出下列關係。

R＝	10	50	100	150	公厘/小時
a＝	0.3956	0.5546	0.6415	0.6985	公厘
$x_1=\frac{7}{a}$＝	17.695	12.622	10.912	10.021	

爲簡便計，以無意變數（Dummy varite）x 代替 D 來積分，則可從 x＝0 積分到 x_1。波長10公分時，有下列關係。

R＝	10	50	100	150	公厘/時
$\phi\cdot Q_a$＝	0.0029525	0.014640	0.030582	0.048196	分貝/公里
$\phi\cdot Q_s$＝	0.0001264	0.002266	0.007603	0.01384	分貝/公里
$k=\phi\cdot Q_t$	0 0030789	0.016906	0.038185	0.062036	分貝/公里

上列數字取兩位有效數字，以表示 k 值在波長10公分之能量由於在降雨中吸收及擴散之情形。

波長23公分時，其相當之數據如下：

R＝	10	50	100	150
$\phi\cdot Q_a$＝	4.432×10^{-4}	1.736×10^{-3}	3.181×10^{-3}	4.478×10^{-3}
$\phi\cdot Q_s$＝	2.616×10^{-10}	2.904×10^{-9}	7.971×10^{-9}	1.407×10^{-8}
$k=\phi\cdot Q_t=\phi\cdot Q_a$（爲實用上之目的）				

k 值可用（公貝/公里）表示是單程觀測之結果。

由此吾人可輕易導出下列結果：

$$\left.\begin{array}{l}波長10公分時，k=2.58\times10^{-4}\times R^{1.079}\ 分貝/公里\\ 波長23公分時，k=6.3\times10^{-5}\times R^{0.839}\ 分貝/公里\end{array}\right\}R\ 公厘/時$$

現在我們可把巴坦氏（Battan）及雷德氏（Ryde）以波長10公分算得之結果比較如下：

R＝	10	100	公厘/小時
k（直接計算）：	0.0030789	0.038185	分貝/公里
巴坦氏（第49頁）K_2R＝	0.003	0.03	分貝/公里
雷德氏	0.00282	0.0318	分貝/公里
k（從$2.58\times10^{-4}\times R^{1.679}$ 式中算得）	0.0031	0.0372	分貝/公里

一般言之，上表所列之值，均可滿足需要。

結　　論

本計算毋需太精細，綜上所述可得下面良好之結果：$Z=207R^{14/9}$，開始之降雨粒徑分佈$N=N_0e^{\frac{D}{a}}$及末速度$C\cdot D^{\frac{1}{2}}$等三式。上述公式與一般採用之公式$Z=200R^{1.6}$極爲相近。同時亦可得$a=\frac{R^{2/9}}{4.32}$之關係式。在降雨強度1至100公厘/時之範圍內，log k 與 log R 非爲直線相關。用雙對數座標繪此曲線時，曲線有部分上突亦有部分下陷。在$k=c\cdot R^n$式中R如超過10公厘/時，則式中之c及n爲常數。

應用兩種不同雷達測定降雨時，可大拉氏（Kodaira）把指數n簡化變成相同，即$n=1$。c及n兩值之大小依波長、溫度、降雨強度之大小而定。本文計算降雨量所用之公式係假設當時之周圍溫度爲 18° C。

倘若兩個雷達同時用來測定降雨量，最好開始就能確定溫度之範圍及能測得之降雨強度。上述兩者能確定後，我們即可求出波長 λ_1 及 λ_2，而而使雨滴用 c_1R^n 及 $c_2R^{1/n}$ 之形式表示。式中c_1及c_2之值差異甚大，但R之指數則幾乎完全相同。如可能的條件大致求定後，還要繼續完成下列工作：

(1)自始至終之水球總吸收量。

(2)求定雨滴大小分佈。

(3)運用光學於球面調和之理論。

更重要的是要實際運用不同之雷達做不同波長之探測，以印證在降雨來臨時應用雷達測定降雨強度之正確性。

由前所述知，雷達觀測之雷達反射率Z可計得降雨強度。由降雨強度R，雷達拍攝之雨型（Rainshield)長度L，當地之集水區效率參數E (Catchment efficiency parameter)及颱風中心移動速度U，用$P=\int_0^l R\frac{dt}{ds}dl=\int_0^l\frac{R}{U}ds$求得降雨量。

式中如颱風中心移動速度U爲零，則$P=\int_{t_1}^{t_2}R\,dt$，如U爲等速度，則$P=\frac{1}{U}\int_{l_2}^{l_2}R\cdot dl$，又如颱風不等速度移動，則$P=\int_0^l\frac{I}{U}dl$。　式中單位，R：公厘/時，U：節（knot)，l：海浬，P：公厘。

故本篇所介紹之理論與解法，可運用於利用雷達搜集之資料預估颱風來臨時降雨量之測算工作。

參 考 文 獻

1. Louis J. Battan, Radar Meteorology, The University of Chicago Press 1959.
2. A. C. Best, The Size Distribution of Raindrops, Royal Meteorological Society, Quarterly Journal, No. 76, 1950.
3. Homer W. Hiser & William L. Freseman, Radar Meteorology.
4. Kodaira, Weather Research Notes, # 90, 1967, Japan Meteorological Association, pp 54-56.
5. Ryde, The Attenuation and Rada Echoes produced at Centimetre Wavelengths by Various Meteorological Phenomena, London Physical Society 1964, pp 169-188.