

斜壓大氣中渦度平流對於低氣壓 發展之影響

廖學鎰
李錦郎¹

On the Cyclone Development in relation to the Vorticity Advection in the Baroclinic Atmosphere

Shyue-Yih Liao
Jiin-lang Lee

Abstract

Vorticity was calculated from the contours of 500 mb charts over the North-eastern China during the summer of 1962. From the comparison of the vorticity patterns at 500mb level and the weather patterns at sea level, it will be seen that the period of rapid cyclone development coincided with the period during which the area of appreciable positive vorticity advection at 500mb level. Conclusion will be made in the concept of vorticity tube that cyclone development at sea level occurs when the axis of vorticity tube incline to the westward. The synoptic situation is also explained by the Sutcliffe's extended theory in this report.

一、前 言

近年來天氣學 (Synoptic meteorology) 最大之進展，或許可說是渦旋度理論 (Vorticity theorem) 被應用於自由大氣運動系統之預報，此等理論直接應用於天氣圖作為天氣預報，乃最近幾年之事。Rossby⁽¹⁾ 於 1939 年發表之論文指出決定天氣變化之主要因素乃西風帶之風速與科氏參數 (Coriolis parameter) 之緯度變化所產生之西風帶長波，且證明此種波動之動態可由渦旋度方程式 (Vorticity equation) 敘述之。Charney^(2,3,4,5) 依此立場，選用渦旋度方程式為大氣變化之法則，而應用於 500mb 面之高度圖，實施數值積分而證明數值預報 (Numerical prediction) 及其使用之可能性。之後，由於高速電子計算機之發展，更給數值預報帶來了美麗的遠景。

許多事實，證明對流層下部之低氣壓之發展與鋒帶 (Frontal zone) 有關，同時亦為上層大氣之狀態所左右。戴因補償 (Dines' compensation)^(6,7) 即反映此上下層大氣相互作用之事實。由觀察得知，對流層中部西風帶長波之傳播，其速度與下層之系統有所不同，此種長波與下層低氣壓間相互作用，而導

致動力學上不穩定之問題。

至於低氣壓發展之天氣學上之問題，Bjerknes^(8,9) 與 Sutcliffe⁽¹⁰⁾ 各有其見解。Bjerknes⁽⁸⁾ 首先注意到上層氣流問題，而想像出兩種發展過程：一由於動力之不穩定 (Dynamic instability) 與鋒面之關係而得；另一由於上層波槽 (Wave trough) 不穩定之成長所致。另一方面，Sutcliffe 用戴因補償之概念，將研究之問題，用垂直速度 (Vertical velocity) 與輻散 (Divergence) 表示之，而求得適用於天氣分析 (Synoptic analysis) 與計算之所謂發展方程式，說明此問題。

本文就 1962 年 5 月 7 日至 5 月 11 日間，我國東北地區一連串所發展之低氣壓為例，觀察高層 (500 mb 面) 之渦旋度之分佈與地面低氣壓之分佈相對應之情形，並將渦旋度隨時間 (24 小時後) 之變化及其平流與地面低氣壓之盛衰，作為比較，而就渦旋管 (Vorticity tube) 之軸上下傾斜之概念，討論低氣壓發展之問題。最後以 Sutcliffe 之理論為基礎，將所得之結果，作理論上之解釋。

二、研究方法

吾人常見天氣圖上高層氣壓槽 (如 500 mb 面)

1. 國立中央大學地球物理研究所

有如圖 1 之實線所示之情形者，此等氣壓槽可將其分為兩種分量：一為低氣壓性之渦旋 (Vorticity)，另一為一般流 (General flow)。一般流無風切 (Wind shear)，故其渦旋度為零。圖 1 中點線所示者，乃此二分量，分別以圓 (渦旋度) 與直線 (一般流) 表示之。此二量合成為等壓面上之 Z (即高度)，即圖 1 中之實線。渦旋度之中心與低氣壓之中心，並不一致，如一般流強，則渦旋度中心與低氣壓中心分離之程度較大；反之，如一般流較弱，則此二中心分離之程度即較小。

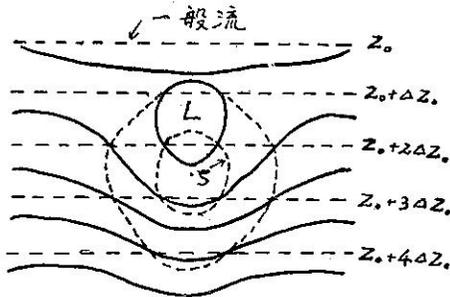


圖 1: 氣壓槽之分解

Fig. 1: Dissociation of pressure pattern

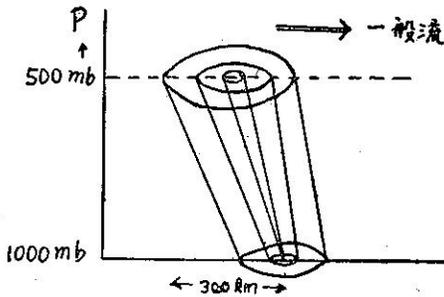


圖 2: 低氣壓之渦旋管

Fig. 2: Vorticity tube of the cyclone

一般言之，地面或 1000mb 面之正渦旋度中心與低氣壓中心大致吻合，即正渦旋度之中心就是低氣壓中心。然而，高層渦旋度之中心，則比低氣壓中心稍偏南些。因此，如地面有低氣壓，而高層有渦旋度存在時，則大氣之垂直剖面，必有一渦旋管 (Vorticity tube) 存在 (如圖 2)，此種渦旋管之上下傾斜，吾人常稱為軸之傾斜，此渦旋管之軸，或傾向西面，或直立，或傾向東面，對於大氣擾亂之發展，有非常密切之關係。此點容後討論。

應用渦旋度方程式來預測大規模之大氣運動，比應用運動方程式，更為合適。因渦旋度方程式可免除壓力梯度項與科氏項 (Coriolis term) 之相互補償

，其最大之益處，乃在渦旋度之時變率為其主要之項。

如果風場 (Wind field) 可以充分準確地觀測，則瞬時渦旋度場 (Instantaneous vorticity field) 可直接由風之觀測而求得。然而由於風之觀測尚有許多缺點，因此如假設地轉型之平衡 (Geostrophic balance) 而由地轉風算出渦旋度，更能令人滿意。根據 Charney⁽¹¹⁾ 及 Thompson⁽¹²⁾ 之研究，使用地轉型渦旋度 (Geostrophic vorticity) 代替實際之渦旋度，有二意義：其一，用地轉風近似 (Geostrophic approximation) 可以濾去聲波與重力波等小波長之小規模運動，此等波在氣象學上並無多大意義，將其除去。其二，地轉風近似可以簡化運動方程式。

設 $\nabla_g (U_g V_g)$ 為地轉風之風速，則由其定義

$$\nabla_g = \mathbf{k} \times \frac{g}{f} \nabla_p Z \quad (\mathbf{k}: Z \text{ 方向之單位向量})$$

$$U_g = -\frac{g}{f} \left(\frac{\partial Z}{\partial y} \right)_p, \quad V_g = \frac{g}{f} \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right)_p$$

得地轉型渦旋度 ζ_g

$$\begin{aligned} \zeta_p &= \nabla \times \nabla_g = \frac{\partial V_g}{\partial x} - \frac{\partial U_g}{\partial y} = \frac{g}{f} \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \right) \\ &= \frac{g}{f} \nabla_p^2 Z \end{aligned}$$

此為一微分方程式，用於天氣學之分析時，可將此微分方程式改變成定差方程式，即式中之二次導數項用如圖 3 之網取定差法來計算。網中之點，均為等距離 (設等於 d)，網之中心 O 置於所要考慮之點，而其對角線則令其與坐標軸一致，則

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right) = \frac{\left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right)_P - \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right)_R}{d} \\ &= \frac{\frac{Z_1 - Z_0}{d} - \frac{Z_0 - Z_3}{d}}{d} \\ &= \frac{Z_1 + Z_3 - 2Z_0}{d^2} \end{aligned}$$

同法可得

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = \frac{Z_2 + Z_4 - 2Z_0}{d^2}$$

故地轉型渦旋度 ζ_g

$$\zeta_g = \frac{g}{fd^2} (Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 - 4Z_0)$$

令 $Z_0 = \frac{1}{4} (Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4)$

則 $\zeta_g = \frac{4g}{fd^2} (Z_0 - Z_0)$

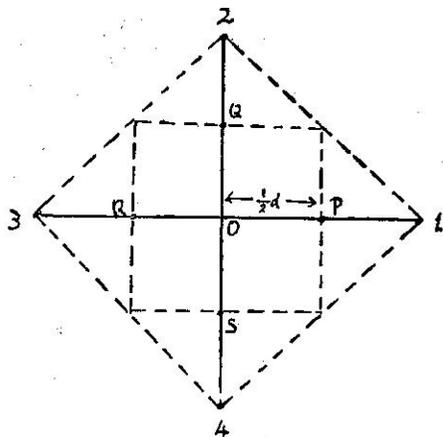


圖 3: 定差網

Fig. 3: Grid distance

由此可知，只要等壓面上各點之高度已知，即可求出渦旋度。在低氣壓中心，因 $z_0 > z_0$ ，故渦旋度為正值；反之，在高氣壓中心，因 $z_0 < z_0$ ，故渦旋度為負值。

本文所用之資料，係採自日本氣象廳發行之1962年5月7日至5月11日間之印刷天氣圖⁽¹⁴⁾，選取我國東北地區上述四日間一連串所發生之低氣壓為例，先就500 mb等壓面之高度，求出渦旋度，再與地面低氣壓之位置，作為比較，茲將計算過程，略述於後：

- (1) 將一成等距離之網狀點，置於該地區，描出各該點500 mb面之高度。圖4為本文所採用之網，網中各點之距離d，為333 km。
- (2) 計算各點之 $z_0 - z_0$

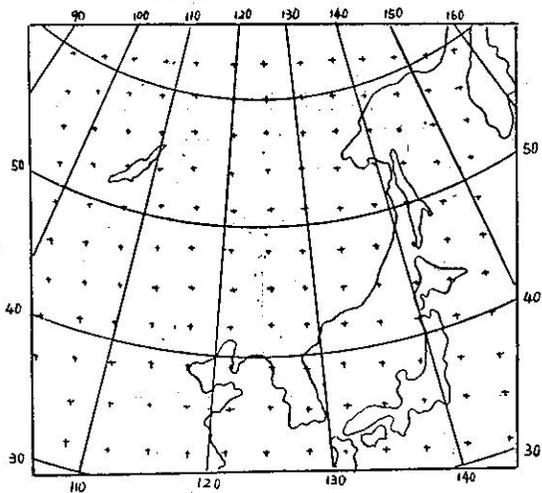


圖 4: 垂直點網

Fig. 4: Grids distribution

- (3) 將算出之 $z_0 - z_0$ 再乘以 $\frac{4g}{fd^2}$ 因子，即得渦旋度。在此取

$$g = 980 \text{ cm/sec}^2$$

$$f = 2\omega \sin\phi \quad (\omega: \text{地轉角速度}, \phi: \text{緯度})$$

$$= 2 \times 7.29 \times 10^{-5} \sin 50^\circ$$

$$= 1.12 \times 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$$

故得 $\frac{4g}{fd^2} = 3.2 \times 10^{-8} \text{ (C.G.S.)}$

- (4) 繪製高空(500 mb)之等渦旋度線圖，再以地面天氣圖(等壓線)比較之。

三、計算結果

圖5至圖8為我國東北地區上述四日間(1962年5月7日至5月10日)之天氣圖，點線為依上述之方法所求得之高層(500 mb)面渦旋度，以 10^{-5} sec^{-1} 為單位，黑線係同一時間地面之等壓線，以 mb 為單位。由此連續四日之天氣圖，吾人可察出如下述之事實：

- (1) 圖5(1962年5月7日 1200 GMT)

朝鮮半島東北側1000 mb低氣壓之西面有一 $15 \times 10^{-5} \text{ sec}^{-1}$ 之高層正渦旋度；依渦旋管之概念言之，即渦旋管之軸向西面傾斜。

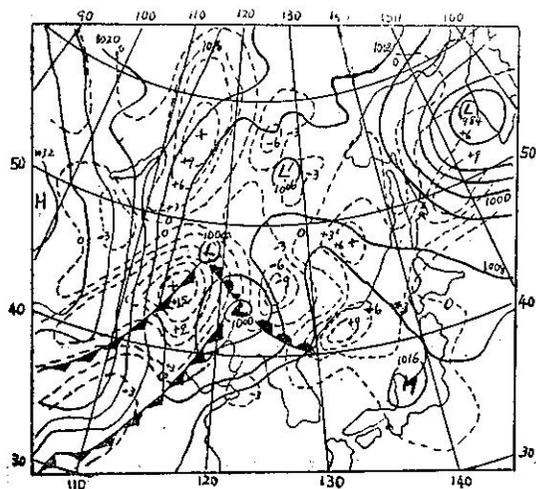


圖 5: 1962年5月7日 1200 GMT

Fig. 5: Surface pressure pattern and vorticity distribution (dotted) on the 500mb surface, 1200Z, 7, May, 1962

- (2) 圖6(5月8日 1200 GMT)

24小時後，地面低氣壓發展至990 mb，接近地面低氣壓中心，高層渦旋度之中心，此時地面低氣壓發展至最盛時期。

- (3) 圖7(5月9日 1200 GMT)

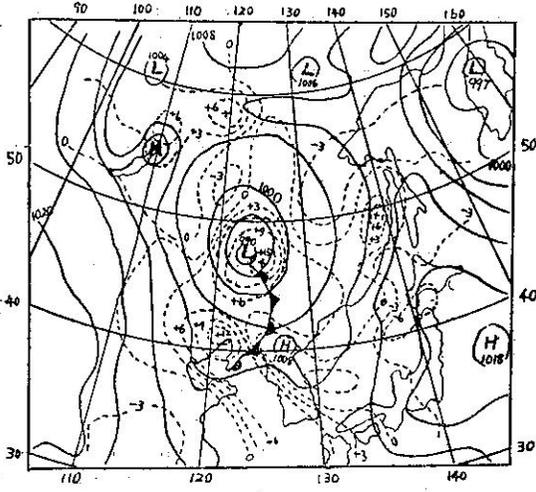


圖 6：1962年5月8日 1200 GMT

Fig. 6: Surface pressure pattern and vorticity distribution (dotted) on the 500mb surface, 1200Z, 8, May, 1962

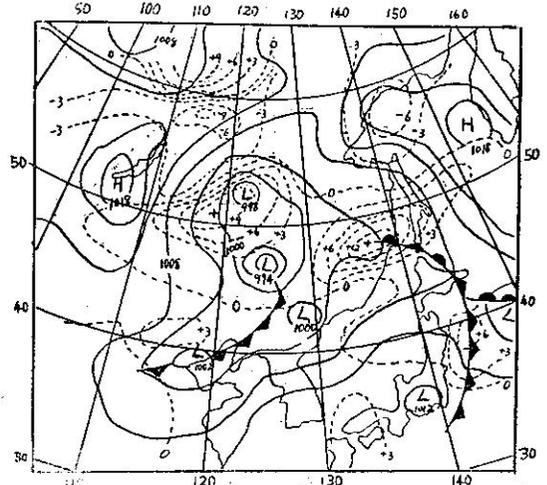


圖 8：1962年5月10日 1200 GMT

Fig. 8: Surface pressure pattern and vorticity distribution (dotted) on the 500mb surface, 1200Z, 10, May, 1962

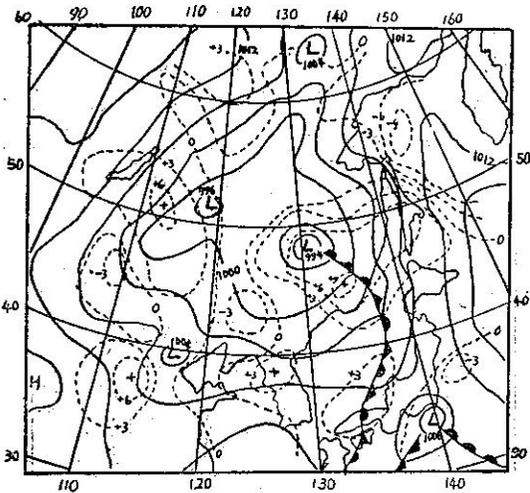


圖 7：1962年5月9日 1200 GMT

Fig. 7: Surface pressure pattern and vorticity distribution (dotted) on the 500mb surface, 1200Z, 9, May, 1962

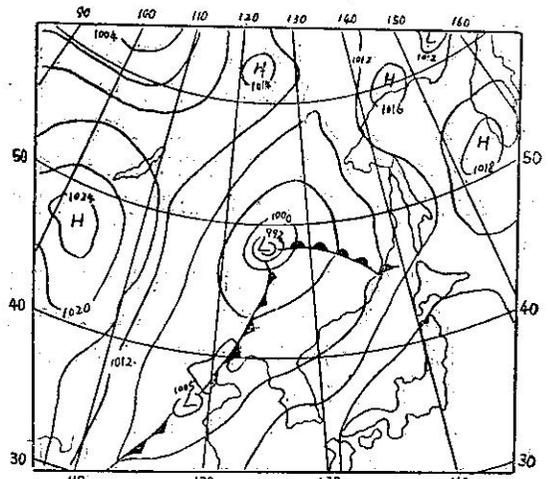


圖 9：1962年5月11日 0000 GMT 地面圖

Fig. 9: Surface pressure pattern on 0000Z, 11, May, 1962

高層之渦旋度平流至地面低氣壓（中心氣壓 994 mb）之東面，或渦旋管之軸向東面傾斜，此時，地面低氣壓顯已減弱。然而貝加爾湖附近（112°E, 52°N）又有另一高層渦旋度（ $6 \times 10^{-5} \text{ sec}^{-1}$ ）正在南下，且其前方有一 990 mb 之小低氣壓。

(4) 圖 8 ((5月10日1200 GMT)

24小時後，圖 7 中北側 996 mb 之低氣壓發展至 994 mb，且其相對應之高層渦旋度（ $9 \times 10^{-5} \text{ sec}^{-1}$ ）仍在其西面。又圖 8 南側（137°E,

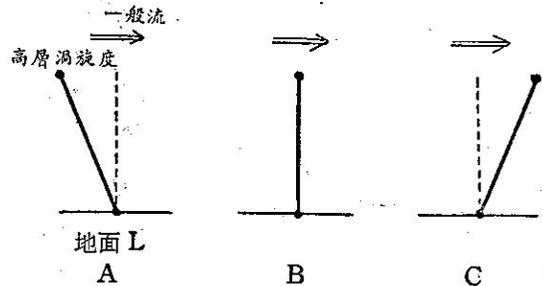


圖 10：渦旋管軸之傾斜

Fig. 10: Inclination of the axis of the vorticity tube

48°N)之高層渦旋度(12×10⁻⁵sec⁻¹)向庫頁島移動，而其相對應之地面低氣壓(圖7中中心氣壓994mb者)此時已消失為微弱之低壓區域。

由上列之事例，吾人可得如下之結論：

- (1)高層之渦旋度如在地面低氣壓之西面時，則地面低氣壓有逐漸發展之可能，如圖之情形，此時為地面低氣壓之發展階段。
- (2)高層之渦旋度如在地面低氣壓之垂直上方時，則地面低氣壓發展至最盛期，如圖 6。
- (3)高層之渦旋度如在地面低氣壓之東面時，則為地面低氣壓衰弱之階段。

上述之結論若以渦旋管之概念說明時，則

- (1)渦旋管之軸向一般流之風前傾斜時，為地面低氣壓之發展階段，如圖 10 A 所示。
- (2)渦旋管直立時，為地面低氣壓發展之最盛期，如圖 10 B 所示。
- (3)渦旋管之軸向一般流之風後傾斜時，為地面低氣壓衰弱之階段，如圖 10 C 所示。

上述之渦旋度，如代以氣壓槽之概念時，則圖 10A之情形相當於高層之槽在地面低氣壓之西面；圖 10 C 之情形相當於高層之槽在地面低氣壓之東面。

又圖 7 中，貝加爾湖東南側 996 mb 之低氣壓中心，24 小時後(見圖 8)已發展至中心氣壓為 994 mb 之低氣壓，此時高層之渦旋度仍在其西面，故可推斷此低氣壓仍在繼續發展中，由 12 小時後之天氣圖(即圖9中之 992 mb 之低氣壓)可證明此推斷無誤。故渦旋管之軸如傾向一般流之風前，且能保持同樣傾斜之形式，沿一般流下移時，則地面低氣壓之壽命較長，並且有繼續發展之可能。

三、結果之動力學解釋

1. 氣壓槽附近上昇氣流之分析

由上述之結論，可以推知高層之槽前有上昇氣流，槽後有下降氣流。在此，將對 ω ($= -\frac{dp}{dt}$) 由理論上稍作定性分析。

在渦旋度方程式中，考慮科氏參數不變(以 f 示之)時，則

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla \cdot \nabla \zeta = f \frac{\partial \omega}{\partial p} \dots\dots\dots (1)$$

式中 ζ 為渦旋度， p 為壓力。由地轉風近似之假定，得地轉型渦旋度為

$$\zeta = \frac{g}{f} \nabla^2 z$$

代入(1)式得

$$\frac{g}{f} \nabla^2 \frac{\partial z}{\partial t} = -\nabla \cdot \nabla \zeta + f \frac{\partial \omega}{\partial p} \dots\dots\dots (2)$$

另一方面，假定絕熱變化，由熱力學第一定律

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial z}{\partial p} \right) = -\nabla \cdot \nabla \left(\frac{\partial z}{\partial p} \right) - s\omega \dots\dots\dots (3)$$

式中 $s = -\frac{\alpha}{g\theta} \frac{\partial \theta}{\partial p}$ (θ : 位溫, α : 比容) 稱為

穩定度係數 (Stability coefficient)

由(2), (3) 消去 $\frac{\partial z}{\partial t}$, 得

$$\nabla^2 \omega + \frac{f^2}{s} \frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} = \frac{f}{s} \left[\frac{\partial}{\partial p} (\nabla \cdot \nabla \zeta) - \frac{g}{f} \nabla^2 \left(\nabla \cdot \nabla \left(\frac{\partial z}{\partial p} \right) \right) \right] \dots\dots\dots (4)$$

此即所謂 ω 方程式

若一般流之速度為 \bar{v} , 則上式中

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla \zeta &\approx \bar{v} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial s} \\ \nabla \cdot \nabla \left(\frac{\partial z}{\partial p} \right) &= \bar{v} \cdot \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial z}{\partial p} \right) + \nabla \cdot \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial p} \right) \\ &= \bar{v} \cdot \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial z}{\partial p} \right) - \frac{f \bar{v}}{g} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial p} \end{aligned} \quad \left(f \bar{v} = -\frac{\partial \bar{v}}{\partial s} \right)$$

又關於 \bar{v} 之空間一定時

$$\begin{aligned} \nabla^2 \bar{v} = 0, \quad \nabla^2 \frac{g}{f} \frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{g}{f} \frac{\partial}{\partial s} \nabla^2 z = \frac{\partial \zeta}{\partial s}, \\ \nabla^2 \bar{v} &= \frac{\partial \zeta}{\partial s} \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p} (\nabla \cdot \nabla \zeta) &= \frac{\partial \bar{v}}{\partial p} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial s} + \bar{v} \cdot \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial p} \right) \\ \frac{g}{f} \nabla^2 \left[\nabla \cdot \nabla \left(\frac{\partial z}{\partial p} \right) \right] &= \bar{v} \cdot \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial p} \right) - \frac{\partial \bar{v}}{\partial p} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial s} \end{aligned}$$

將此二量代入 ω 方程式，得

$$\nabla^2 \omega + \frac{f^2}{s} \frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} = \frac{2f}{s} \frac{\partial \bar{v}}{\partial p} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial s} \dots\dots\dots (5)$$

假定 $(\omega)_{1000} = (\omega)_0 = 0$,

500 mb 為 ω 成拋物線形之極大值。

$$\omega = 4\omega_{500} \left(\frac{p}{p_{1000}} \right) \left(1 - \frac{p}{p_{1000}} \right) \quad (p_{1000} = 1000 \text{mb})$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} &= - \left(\frac{8}{p_{1000}^2} \right) \omega_{500} \equiv - \frac{2}{\Delta p^2} \omega_{500}, \\ &\quad (\Delta p = 500 \text{mb}) \end{aligned}$$

又假定 $\omega \sim \sin \frac{2\pi}{L} x \equiv \sin kx$ 則

$$\nabla^2 \omega = -k^2 \omega$$

代入(5)式，得

$$-\left(k^2 + \frac{2f^2}{s\Delta p^2}\right) \omega_{500} = \frac{2f}{s} \frac{\partial \bar{v}}{\partial p} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial s}$$

$$\text{令 } \alpha = \frac{2f^2}{s\Delta p^2}, \frac{\partial \bar{v}}{\partial p} = -\frac{\bar{v}_h}{\Delta p}, \frac{\partial \zeta}{\partial s} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} (\zeta_{500} + \zeta_{1000})$$

$$\text{則 } \left(\frac{f}{\Delta p}\right) \omega_{500} = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha^2}{k^2 + \alpha^2}\right) \bar{v}_h \frac{\partial}{\partial s} (\zeta_{500} + \zeta_{1000}) \dots \dots \dots (6)$$

$$\text{或 } \omega_{500} \propto \bar{v} \frac{\partial}{\partial s} (\zeta_{500} + \zeta_{1000}) \dots \dots \dots (6)$$

此乃考慮 500mb 面與 100mb 面二層間 ω 之近似式，為 Sutcliffe 於 1947 年所求得。式中 \bar{v}_h 為 500mb 面與 1000 mb 面間之熱力風之一般流， $\frac{\partial}{\partial s}$ 乃沿一般流方向之微分， ζ_{500} 與 ζ_{1000} 分別為 500 mb 與 1000 mb 面之渦旋度。

若考慮大氣為一參數模型 (One parameter model) 時，高度 z 為壓力 p 之函數，即

$$z(x,y,p,t) = A(p) z_{500}(x,y,t)$$

$$\text{curl } z_{1000} = A \text{ curl } z_{500}$$

$$\zeta_{1000} \propto \zeta_{500}$$

$$\bar{v}_{500} \propto \bar{v}_h$$

$$\text{則 } \omega_{500} \propto \bar{v}_{500} \frac{\partial \zeta_{500}}{\partial s}$$

此即一參數模型之 ω ，單由 500 mb 之高度 z ，即可求出 ω ，用語言表示，即 500 mb 面之渦旋度沿一般流 (\bar{v}_{500}) 之下流之方向減少之處，有上昇氣流 ($\omega < 0$) 發生。以圖示之，即如圖 11。

陰影部份為渦旋度，其前方有上昇氣流，後方有

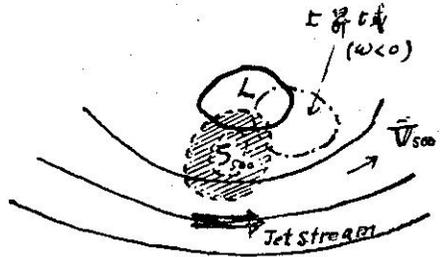


圖 11: ζ 與 ω

Fig. 11: Vorticity distribution in relation to the vertical velocity

下降氣流。

1958 年，由 H. Riehl⁽⁴³⁾ 編輯之 “The Jet Stream” 會對高層之噴射氣流 (Jet stream) 與地面低氣壓之發展，作詳細之說明；在此，簡言之，可概括下列兩點：

(1) 與噴射氣流無關係之地面低氣壓將減弱或消失。

(2) 地面低氣壓之發展與噴射氣流最強區域 (即 Jet 軸上風速最強之處) 有關係，發展期之地面低氣壓在噴射氣流風速最強區域之左前方。

綜上所述，吾人對於「高層之渦旋度平流」之概念，得一初步之認識，即噴射氣流風速最大域之左側為正渦旋度最大之處，亦即渦旋度中心。其前方為渦旋度平流之處，即渦旋度梯度 $\left(\frac{\partial \zeta}{\partial s}\right)$ 最大之處，亦即 ω 最大之處 (圖 11 之上昇域)；換言之，即地面低氣壓發展之意。

2. 低氣壓發展之機構

由上述之例，吾人已知高層之渦旋度如於地面低氣壓之後，而漸次超越其前時，則低氣壓將會發展，

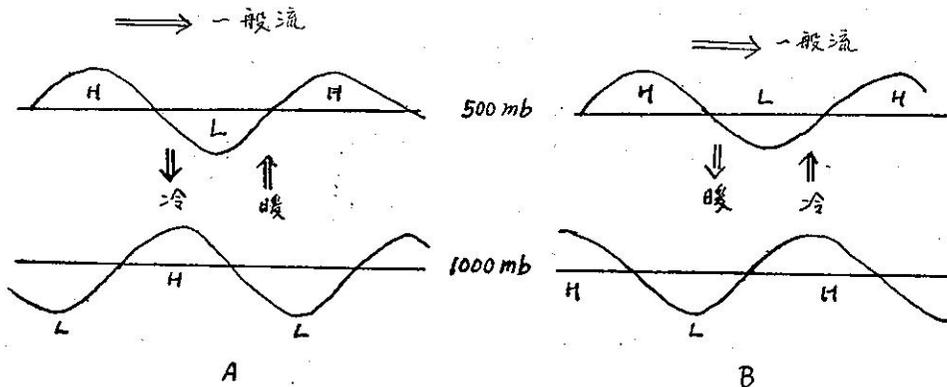


圖 12: 高層之槽與地面低氣壓

Fig. 12: Relation between surface low and upper trough.

在此試就動力學之意義，作簡單之分析。如圖12A，考慮高層等壓面（500 mb 面）之高度及地面 1000 mb 等壓面之高度時，如前所述，高層氣壓槽之前面有上昇氣流（ $\omega < 0$ ），後面有下降氣流，尤其是高層之槽在地面低氣壓之後面時，則槽前之層厚 h 相對的比槽後為大；若以圖之 500 mb 面與 1000 mb 面間之平均氣溫來說，則槽前之空氣相對的較暖，槽後之空氣相對的較冷。

因此，就整體來說，槽之前面，相對的有暖空氣上升，後面相對的有冷空氣下降；同樣情形，如以高氣壓着眼時，則高層氣壓之脊（Ridge）之前面相對的有冷空氣下降，後面相對的有暖空氣上升。照此，高層之槽如在地面低氣壓之後面時，則於近槽之處，形成位能之減少。

若考慮在無摩擦及絕熱過程時，上述之位能減少，即低氣壓近傍之動能增加，即圖 12A 之擾亂之振幅將形增大。

由運動方程式

$$\frac{\partial \nabla}{\partial t} + \nabla \cdot \nabla \nabla + \omega \frac{\partial \nabla}{\partial p} + f \mathbf{k} \times \nabla = -\nabla \phi$$

式中 $\phi = gz$ ， \mathbf{R} 為 z 方向（即垂直向上）之單位向量。設擾亂之動能為 k ，而擾亂場之平均動能為 \bar{k} ，則

$$k = \frac{1}{2} \nabla \cdot \nabla$$

$$\bar{k} = \frac{1}{2} \iiint \phi \nabla \cdot \nabla dx dy dp$$

又 $\nabla \cdot \mathbf{R} \times \nabla \equiv 0$

$$\nabla \cdot \nabla \phi = \nabla \cdot (\nabla \phi) - \phi \nabla \cdot \nabla$$

由境界條件 $(\omega)_0 = (\omega)_{1000} = 0$ ，可得動能之時間變率

$$\frac{\partial \bar{k}}{\partial t} = \iiint \phi \nabla \cdot \nabla dx dy dp$$

$$\left(\iiint \int (\nabla \cdot \nabla k + \omega \frac{\partial k}{\partial p}) dx dy dp = 0 \right)$$

$$= - \iiint \int \phi \frac{\partial \omega}{\partial p} dx dy dp$$

$$= - \iiint \int \frac{\partial}{\partial p} (\phi \omega) dx dy dp$$

$$+ \iiint \int \omega \frac{\partial \phi}{\partial p} dx dy dp$$

$$= \iiint \int \omega \frac{\partial \phi}{\partial p} dx dy dp$$

又 $\frac{\partial \phi}{\partial p} = \frac{1}{g} \frac{\partial \ln z}{\partial p} = -\frac{\mathbf{k}}{g^2} \frac{T}{p} \propto -h$

h 表層厚。故得

$$\frac{\partial \bar{k}}{\partial t} \sim - \iiint \int \omega h dx dy dp \dots \dots \dots (8)$$

如上述之情形（高層之槽在地面 L 之後），槽之前面

$$\omega < 0, h > 0 \quad \text{故 } \overline{\omega h} < 0$$

槽之後面

$$\omega > 0, h < 0, \quad \text{故 } \overline{\omega h} < 0$$

由此，動能 \bar{k} 之增大，將可期望也。

反之，若高層之槽在地面低氣壓之前面，且槽前有上昇氣流，如圖 12B 所示，槽前相對的有冷空氣，槽後相對的有暖空氣。故槽之前面有冷氣上昇，後面有暖氣下降，致使有位能增加而動能減少之趨勢。

在此例，槽前

$$\omega < 0, h < 0 \quad \text{故 } \overline{\omega h} > 0$$

槽後

$$\omega > 0, h > 0 \quad \text{故 } \overline{\omega h} > 0$$

故亦即此系有動能減少之傾向。

又如上下之軸直立時，則無論槽前槽後，恒為 $\overline{\omega h} = 0$ ，故位能動能均無增減。

3. 氣壓槽上下軸之傾斜

前已述及，高層渦旋度如在地面低氣壓之後面時，槽前相對的有暖氣上昇，槽後相對的有冷氣下降。然而，此相對冷暖之詞，亦僅是定性之說。在此，於簡單之大氣模型，關於高層之渦旋度與地面低氣壓之上下之軸之傾斜問題，再次討論之。

圖 13 示 500 mb 與 1000 mb 等壓面之高度 z ，可考慮其有正弦波之擾亂，又此二者，設有相位差 δ 時，則擾亂場

$$z_{500} = A \sin \frac{2\pi}{L} x$$

$$z_{1000} = A \sin \frac{2\pi}{L} (x - \delta)$$

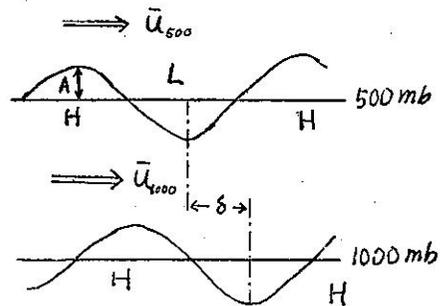


圖13：渦旋軸之上下傾斜

Fig. 13: Inclination of the axis of the vorticity tube

式中 A 為振幅，L 為波長，此時二層間之層厚 h 為

$$\begin{aligned} h &= z_{500} - z_{1000} \\ &= A \left[\sin \frac{2\pi}{L} x - \sin \frac{2\pi}{L} (x - \delta) \right] \\ &= A \left[(1 - \cos \frac{2\pi}{L} \delta) \sin \frac{2\pi}{L} x + \sin \frac{2\pi}{L} \delta \cos \frac{2\pi}{L} x \right] \end{aligned}$$

假設 δ 很小時，則

$$\begin{aligned} 1 - \cos \frac{2\pi}{L} \delta &= 0 \\ \sin \frac{2\pi}{L} \delta &= \frac{2\pi}{L} \delta \end{aligned}$$

故 $h = (A \frac{2\pi}{L} \delta) \cos \frac{2\pi}{L} x \dots\dots\dots(9)$

δ 為高層之擾亂與下層之擾亂之相位差， δ 用他量表示時，其最方便者為

$$\overline{h\nu} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h \cdot \left(\frac{v_{500} + v_{1000}}{L} \right) dx \dots\dots\dots(10)$$

$$v_{500} = -\frac{g}{\theta} \frac{\partial z_{500}}{\partial x} = A \frac{g}{f} \left(\frac{2\pi}{L} \right) \cos \frac{2\pi}{L} x$$

$$v_{1000} = \frac{g}{f} \frac{\partial z_{1000}}{\partial x} = A \frac{g}{f} \left(\frac{2\pi}{L} \right) \cos \frac{2\pi}{L} (x - \delta)$$

因此，當 δ 小時

$$\frac{v_{500} + v_{1000}}{L} = A \left(\frac{g}{f} \right) \left(\frac{2\pi}{L} \right) \cos \frac{2\pi}{L} x \dots\dots\dots(11)$$

故 $\overline{h\nu} = \frac{1}{2} \left[A \left(\frac{2\pi}{L} \right) \right]^2 \left(\frac{g}{f} \right) \delta \cos \delta \dots\dots\dots(12)$

即相位差 δ 與 $\overline{h\nu}$ 成比例，設二層間之平均氣溫為 T，則 $\overline{h\nu} \propto \sqrt{T}$

則 $\overline{h\nu}$ 即表示顯熱之北向輸送 (Northward eddy transport of sensible heat)，因此，若高層之槽在下層之槽之後面時 ($\delta > 0$)，即表示顯熱正向北輸送。 δ 為負值時，則反之，(即向南輸送之意)。

其次，考慮 $\overline{h\nu}$ 正負之問題，與擾亂之發展，前述動能之時變率

$$\frac{\partial k}{\partial t} \sim - \iiint \omega h \, dx \, dy \, dp$$

只考慮 x 方向之運動時

$$\frac{\partial k}{\partial t} \sim (-\overline{\omega h}) \dots\dots\dots(13)$$

上式中橫線 '—' 表示 x 方向之平均值，前已述及考慮 500 mb 面與 1000 mb 面二層時

$$\overline{\omega} \sim \overline{u}_h \frac{\partial \zeta}{\partial x} \dots\dots\dots(14)$$

\overline{u}_h 係指 x 方向之熱力風平均值，然 $\overline{u}_h = \overline{u}_{500} - \overline{u}_{1000}$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 v_{500}}{\partial x^2} + \frac{\partial v_{1000}}{\partial x^2} \right)$$

故 $\frac{\partial k}{\partial t} \sim -\overline{u}_h h \frac{\partial \zeta}{\partial x} = -\overline{u}_h h \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$

於此考慮 $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \propto -v$ ， $v \sim \cos \frac{2\pi}{L} x$ 時

$$\frac{\partial k}{\partial t} \sim \overline{h\nu} \sim \delta \dots\dots\dots(15)$$

即 $\overline{h\nu} > 0$ (或 $\delta > 0$) 時，有動能增大之意義。

於此，再度考慮前節所舉之例，即高層渦旋度如在地面低氣壓之後面時，於渦旋軸之觀念說明時，即 $\delta > 0$ ；於顯熱輸送之觀念說明時，即向北輸送之意。似此情況，擾亂場 (地面低氣壓) 可謂正在發展中。地面低氣壓發展最盛時，渦旋軸上下直立，此時即動能無增減。

以上所述，均為瞬時 ($T=0$) 情況，下一瞬間 ($T=\Delta t$) 渦旋軸之傾斜將變何情形 (即 δ 之增大或減小)，可由 $\frac{\partial^2 k}{\partial t^2}$ 之符號決定之，此即所謂穩定度之問題。

4. 擾亂場之穩定度

前已述及， $T=0$ 時擾亂場動能之增減與上下渦旋軸之傾斜 (即 δ) 之關係。其次之問題是 $T=\Delta t$ 時將如何？為簡單起見乃考慮如圖 14 之二層模型。

500mb 面當為正壓大氣 (Barotropic atmosphere) 考慮時

$$\frac{\partial \zeta_{500}}{\partial t} + \overline{u}_{500} \frac{\partial \zeta_{500}}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots(16)$$

在此，不考慮 $\beta = \frac{\partial f}{\partial y}$ 之影響，由上式 500mb 面之渦旋度方程式為

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta_{500}}{\partial t} &= -c_{500} \frac{\partial \zeta_{500}}{\partial x} \\ c_{500} &= \overline{u}_{500} \dots\dots\dots(17) \end{aligned}$$

之相位速度 (Phase velocity) 乃向東進行。其次考慮下層 750mb 面之渦旋度方程式，即

$$\frac{\partial \zeta_{750}}{\partial t} + \overline{u}_{750} \frac{\partial \zeta_{750}}{\partial x} = f \left(\frac{\partial \omega}{\partial p} \right)_{750} \dots\dots\dots(18)$$

如圖 14，考慮 ω 之拋物線分佈與 \overline{u} 之線形分佈時則

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \omega}{\partial p} \right)_{750} &= \frac{1}{\Delta p} (\omega_{1000} - \omega_{500}) = -\frac{1}{\Delta p} \omega_{500} \\ \overline{u}_{500} &= 2\overline{u}_{750} \end{aligned}$$

故 750mb 面之渦旋度方程式變為

$$\frac{\partial \zeta_{750}}{\partial t} + \frac{1}{2} \overline{u}_{500} \frac{\partial \zeta_{750}}{\partial x} = - \left(\frac{f}{\Delta p} \right) \omega_{500} \dots\dots\dots(19)$$

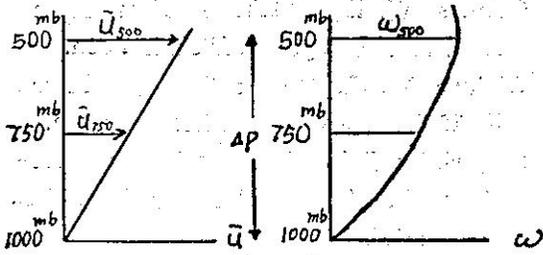


圖14: ω 與 \bar{u}

Fig. 14: Zonal velocity and vertical velocity.

然而，由第 1 節所述， ω_{500} 可從二層間之熱力風之平均速度與二層之平均渦旋度求出，即

$$\omega_{500} = k \bar{u}_{750} \frac{\partial \zeta_{750}}{\partial x} \dots\dots\dots (20)$$

但是 $\bar{u}_{750} = \frac{1}{2} \bar{u}_{500} = \frac{1}{2} (\bar{u}_{500} - \bar{u}_{1000})$

$$\zeta_{750} = \frac{1}{2} (\zeta_{500} + \zeta_{1000})$$

(20) 式中 k 為比例常數，(20) 代入 (11) 得

$$\frac{\partial \zeta_{750}}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{f}{\Delta p} k \right) \bar{u}_{500} \frac{\partial \zeta_{750}}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots (21)$$

即 $T = \Delta t$ 時，750mb 之擾亂為 $\frac{\partial \zeta_{750}}{\partial t} = -c_{750} \frac{\partial \zeta_{750}}{\partial x}$

$$\text{但 } c_{750} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{f}{\Delta p} k \right) \bar{u}_{500} \dots\dots\dots (22)$$

正如上述，相位速度亦向東進行，故 $T=0$ 時渦旋軸之傾斜 δ 為

$$c_{500} \cong c_{750} \Rightarrow \frac{\text{高層渦旋度之速度}}{\text{下層渦旋度之速度}}$$

時間比 $T=0$ 小或比 $T=0$ 大時，上下相位差用 δ 表示時，則

$$c_{500} \cong c_{750} \Rightarrow \frac{\partial \delta}{\partial t} \cong 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 k}{\partial t^2} \cong 0$$

由 (17) 及 (22)，上式 $c_{500} \cong c_{750}$ 之關係，可改寫為

$$1 \cong \frac{1}{2} \left(1 + \frac{f}{\Delta p} k \right) \Rightarrow \frac{\partial^2 k}{\partial t^2} \cong 0$$

上式之 k 用 (6) 式之結果代入時，得

$$\frac{2f^2}{s \Delta p^2} \cong k^2 = \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 k}{\partial t^2} \cong 0 \dots\dots\dots (23)$$

(23) 式是關於長波之所謂「穩定性之判定基準」。

以上所述，乃通常所謂之穩定不穩定之問題，可以圖 15 表示之。然而，第二種穩定與第一種不穩定，

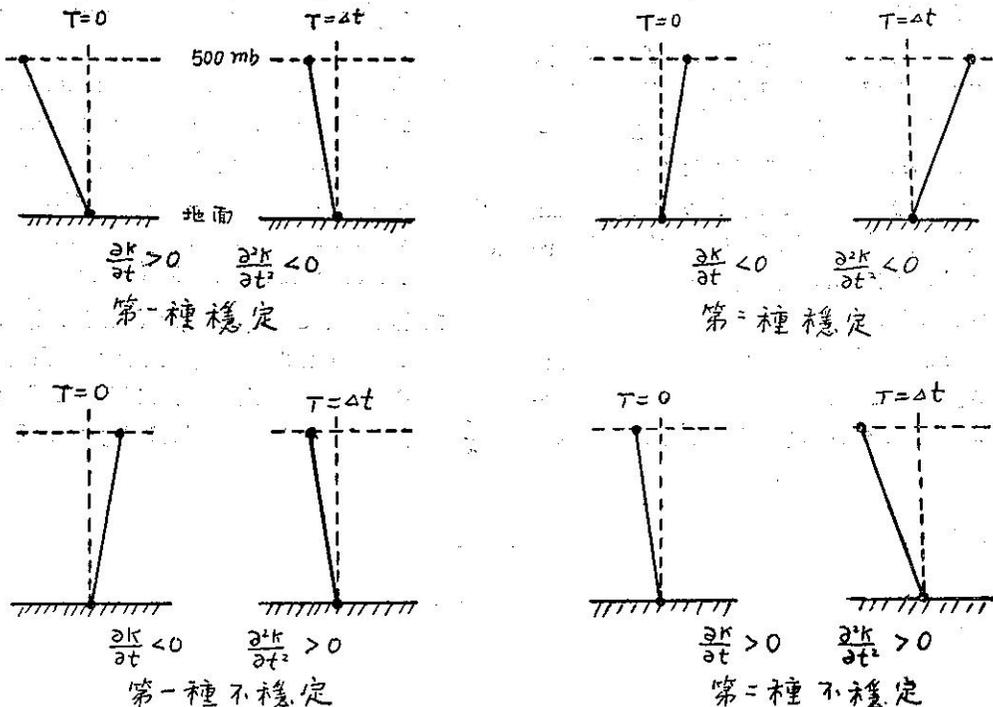


圖 15: 穩定之渦旋軸與不穩定之渦旋軸

Fig. 15: Stability and instability

在實際之大氣中，則難以找到。圖5至8圖所述之實例，乃屬第一種穩定情況。

結 論

由本文前半部所作之低氣壓附近渦旋度分佈之天氣學分析，得知渦旋度平流乃低氣壓發展之一重要因素，同時渦旋管之傾斜，對於低氣壓之發展與消滅有非常密切之關係。對上述之結果，由 Sutcliffe 之理論加以擴張，亦可得滿意之動力氣象學上定性之解釋。至於定量之分析，因其計算量繁雜，得借助於電子計算機，方得解決。

參 考 文 獻

1. Rossby, C. G. and Collaborators (1939): Relation between variations in the intensity of the zonal circulation of the atmosphere and the displacements of the semipermanent centers of action. *J. Mar. Res.*, 2: 38-55.
2. Charney, J. G. (1949): On the scale basis for numerical prediction of Large-scale motions in the atmosphere. *J. Meteor.*, 6: 371-385.
3. Charney, J. G. and Eliassen, A. (1949): A numerical method for predicting the perturbation of the middle latitude-westerlies. *Tullus*, 1, No.2: 38-54.
4. Charney, J. G., Fjörtoft, R., Von Nauman, J., (1950): Numerical integration of barotropic vorticity equation. *Tellus*, 2, No.4: 237-254.
5. Charney, J. G., (1951): Dynamic forecasting by numerical process. *Compendium of Meteorology*, A. M. S., 470-482.
6. Dines, W. H., (1912): *Geophys. Mem.*, No.2, Meteorological office, London.
7. Dines, W. H., (1919): *Geophys. Mem.*, No.13, Meteorological Office, London.
8. Bjerknes, J., (1937): Theorie der ausser-tropischen Zyklonenbildung. *Met. Zeits.*, 54: 462-466.
9. Bjerknes, J., (1951) : *Compendium of meteorology*, pp. 577-598, American Meteorological Society.
10. Sutcliffe, R. C., (1947): A contribution to the problem of development. *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.*, Vol. 73: 370-383.
11. Charney, J. G., (1948) : On the scale of atmospheric motion. *Geophys. Publ.* 17, No.2. 1799.
12. Thompson, P.P., (1952) : Notes on the theory of large-scale disturbances in atmospheric flow with applications to numerical weather Prediction. *Geophysical Research Paper*, No.16., U. S. Air Force Cambridge Research Center, 106 pp.
13. Alaka, M.A., C.L. Jordan and R.J. Renord. (1953): *The Jet stream*. Edited by H. Riehl. Pub. by Bureau of Aeronautics, U.S.A. Prepared under a contract between Project "AROWA" of the Bureau of Aeronautics and University of Chicago.
14. *Daily Weather Maps*. Sea level, 850 mb, 700 mb and 500 mb /charts with synoptic data tabulations. No.1376-1380. (1962), Japan Meteorological Agency, Tokyo.