天氣預報考核上應用情報理論之研究

廖學鎰

Application of Information Theory to Verification of Weather Forecasts.

Liao Shyue-yih

Abstract

Verification of weather forecasts has been a controversial subject for more than eighty years and affected nearly the entire field of meteorology. This paper describes some of the important histories this controversy and attempts to show that some of the existing confusions disappear when information theory is applied to the verification of weather forecasts.

There are many other unsolved problems under the verification. Uppon careful analysis it appears that these problems are meteorological in nature. To our knowledge in the physics of air is still in a state of deficiency and will be reflected in the problem of verification.

一、前　言

天氣預報之考核 (Verification) ，爲人類分析天氣圖，以資天氣預報之依據以來，發生爭論而未獲具體解決之問題。此問題之牽涉甚廣，其響影可及整個之氣象領域。但其目的計有業務之考核、人員之考核及技術之考核等三種，本文討論之範圍以業務考核爲限。

天氣預報之目的在供應給應用者之需要，故考核天氣預報之優劣，應視其是否滿足應用者之要求而定，由長時間考核之結果，即可證明整個業務之成敗。換言之，即爲整個業務之有效與否之評價。惟天氣預報之形式與內容，隨應用者所要求之條件而有不同，勢難得到一種完全一致之考核方法。

又天氣預報是一種定性的物理量，不是定量的物理量，因而對其考核增加困難。總之，天氣預報之考核，應力求客觀性，減少主觀的判斷，才可達成其目的。

本文將應用晚近發展之情報理論 (Information theory) 之思想，擬定一種考核天氣預報之新方法，並與已往各種天氣預報考核方法做比較，研討其得失，以資今後天氣預報考核改進之用。

二、天氣預報考核簡史

據1884年 Köppen[1]氏之研究，世界最早之天氣預報考核方法，是由美國人在1875年訂定。此方法將各種預報氣象要素， 分類三至五個種類 (Category)，而計算預報準確次數與預報錯誤次數之比，訂定爲天氣預報考核標準。至1877年德國人應用此方法，執行天氣預報考核。Köppen之研究以後，天氣預報之考核方法及天氣預報考核是否有價値等問題，則成爲氣象學界之論爭中心。

1906年 Klein[2]氏，主張預報準確率，應以隨便的天氣預報 (Random forecast) 準確率爲零%而計算，故預報員之準確率得分，應比天氣預報準確率爲低。同時 Klein氏指示，當時之政府機構之天氣預報 (Official forecast) 準確率，比較素樸的持久天氣預報 (Naive persistance forecast) 之準確率爲低，因而應設立健全考核制度，嚴格管理天氣預報之發佈，以助長提高天氣預報準確率。所謂持久天氣預報 (Persistance forecast) ，係指應用天氣有維持相當時間之性質，將以今日之實際天氣當做明日之天氏氣預報，此種天氣預報，謂之爲持久天氣預報。對 Klein氏之見解，中歐學派之A. Schmanss(1911)[3] 主張其反對意見說：天氣預報之考核，首先將天氣預報應分類爲準確及失敗之兩種類，但目前對此種分類之客觀的標準未能確定，因而天氣預報之客觀的分類未能做到。因此他主張天氣預報不能爲嚴格的統計的

有意性試驗(Statistical performance test)之對象，而他結論爲：諸多學者主張之天氣預報考核方法，並無任何目標 (Verification serve no purpose)，故無任何意義，而對天氣預報考核抱否認之態度。總之1920年以前之天氣預報考核方法，係以氣候學的觀念爲主要因素，而統計的方法爲副因素之考核方法。

自1920年以後，即諸學者注重統計學的方法之運用，而對天氣預報考核方法，有所改革。其中最重要者爲 Gilbert. J. P. (1884)[4] Doolittle. M. H. (1885)[5]' Clayton. H. H. (1893)[6]等開始啓用之預報的成功機會(Chance success of forecast)之觀念。所謂預報的成功機會之觀念，是主張稀罕天氣現象與常發生的天氣現象之預報，其重量 (Weight) 不同，其考核方法，應以氣候學的平均 (Climatic normal) 爲標準，訂定對各種天氣之考核重量之標準，以資天氣預報考核之改進。中歐學派之A. Schmanss, A. Defant等，雖然否認天氣預報考核之效果，但此項觀念由Grossmann, L. (1898)[7], Walz, F. J. (1902)[8], Wallén Axel (1921)[9] 等學者承繼改良，而1926年Heidke, P.[10]完成所謂技術得分 (Skill score) 之天氣預報考核法。此天氣預報評定方法，現爲應用最爲廣汎之方法。

Muller[11]氏歎言說：當時在氣象學界指導地位之學者，對天氣預報抱冷淡態度，而否認天氣預報考核之效果，招致天氣預報考核方法研究之枯萎，實爲可惜。

第二次世界大戰期間，雖然有 Gringorten I.[12] 之總合的再檢討，但尚無新機軸之發展。但晚近客觀天氣預報法 (Objective weather forecasting) 之發展，據 Brier (1946)[13], Price (1949)[14], Klein (1949)[15], Thompson (1950)[16], Berkofsky (1950)[17], William (1951)[18] 等研究，應用準確率之計算及技術得分之計算等天氣預報考核之方法於客觀天氣預報法中，得明瞭的數量評定效果。而因天氣預報考核法之研究逐漸被重視。晚近天氣預報之考核中，將有引用近代推測統計學，操作研究 (Operational research)之方法，情報理論 (Information thëory) 等方法研究之趨勢。

三、列聯表與技術得分

天氣預報之準確率，普通以某種氣象現象之準確預報次數與所作預報總次數之百分比表示之。計算準確率前通常將某種天氣預報與實測之結果，合列爲一列聯表 (Contingency table) 如表一中所示，以協助計算。

表一：列聯表
Table 1 ：Contingency table

實測＼預報	發　生 (晴)	不發生(雨)	總　　計
發　生 (晴)	$F_1=50$	$W_2=15$	$R_1=65$
不發生 (雨)	$W_1=5$	$F_2=30$	$R_2=35$
總　　計	$C_1=55$	$C_2=45$	$T=100$

表中 F_1 爲預報發生且實測發生之次數，W_2 爲預報不發生而實測發生之次數，W_1 爲預預發生而實測不發生之次數，F_2爲預報不發生且實測不發生之次數。

如果天氣現象分類爲晴天及雨天兩種，而發佈天氣預報 100 次中，預報晴天且實測晴天次數爲50次，預報雨天而實測晴天爲15次，預報雨天而實測晴天爲 5 次，預報雨天且實測雨天爲30次，即

預報晴天 (發生) 總數：$C_1=F_1+W_1$
$=50+5=55$次

預報雨天(不發生)總數：$C_2=W_2+F_2$
$=15+30=45$次

實測晴天 (發生) 總數：$R_1=F_1+W_2$
$=50+15=65$次

實測雨天(不發生)總數：$R_2=W_1+F_2$
$=5+30=35$次

預報準確總數：$F=F_1+F_2=50+30=80$次

預報不準確總數：$W=W_1+W_2=5+15=20$次

預報總數：$T=F+W=C_1+C_2=R_1+R_2$
$=100$次

此場合準確率(Percent score)可以由上述定義算得

$$準確率=\frac{F}{T}\times100=\frac{80}{100}\times100=80\%$$

如果由列聯表中之資料計算晴天之惑然率及雨天之惑然率，可得各爲 $\frac{R_1}{T}=\frac{65}{100}$ 及 $\frac{R_2}{T}=\frac{35}{100}$ 。此資料可以解釋如下：若不使用天氣預報技術，任何人都可以做隨便天氣預告，而預報晴天一次，即有 $\frac{R_1}{T}=\frac{65}{100}$ 之命中惑然率，而預報雨天一次，即有 $\frac{R_2}{T}=\frac{35}{100}$ 命中之惑然率。在偶合表中所示之例，是預報晴天次數爲 $C_1=55$次，因而可命中之次數爲 $C_1\times\frac{R_1}{T}=55\times\frac{65}{100}$次。同理預報雨天次數爲 $C_2=$

45次，因而可命中之次數為 $C_2\times\frac{R_2}{T}=45\times\frac{35}{100}$次。兩者相加可得隨便天氣預報（Random forecast）命中次數D為

$$D=C_1\frac{R_1}{T}+C_2\frac{R_2}{T}=55\times\frac{65}{100}+45\times\frac{35}{100}=51.5\text{次}$$

此次數係由其統計的及氣候學的安排，必然命中之次數，或可以說：純粹憑機會應得到之準確預報次數，與天氣預報技術完全無關。故純粹憑天氣預報技術，得到之準確預報次數僅為F－D＝80－51.5＝29.5次。據此觀點Heidke定義技術得分 S（Skill score）如下：

$$S=\frac{F-D}{T-D}\times100=\frac{80-51.5}{100-51.5}\times100=59\% \quad\cdots\cdots(1)$$

式中如果預報完全正確，即 F＝ T，可得技術得分為100％。如果預報準確次數等於 D時，F＝D，技術得分為零，可以說此種天氣預報技術無使用價值。

四、天氣預報之經濟的價值

容後將應用操作研究（Operational research）之方法，討論天氣預報之價值問題。

令 ϑ_f 為某種氣象要素之預報值，而 ϑ 為此氣象要素之實測值。通常有適當預報時，可就地防範以減少氣象災害為最低限度，但是預報不準確時常防範不周而成災。若令預報不準確而誘致之氣象災害為 L，據統計略與預報誤差（$\vartheta-\vartheta_f$）之平方成正比例。若令 α為比例常數即

$$L=\alpha(\vartheta-\vartheta_f)^2 \quad\cdots\cdots(2)$$

茲令 r 為預報之準確率，即可以計算 L之期待值L_f如下：

$$L_f=\alpha\left(\overline{\vartheta^2}-2\,\overline{\vartheta\vartheta_f}+\overline{\vartheta_f^2}\right)=\alpha\,\sigma_\theta^2\left\{\left(1+\frac{\sigma_f^2}{\sigma_\theta^2}\right)-2\,\frac{\sigma_f}{\sigma_\theta}\,r\right\} \quad\cdots\cdots(3)$$

式中 σ_f 及 σ_θ 各為 ϑ_f 及 ϑ 之標準偏差（Standard deviation）。

如果不使用預報（即$\sigma_f=0$），僅使用氣候學的平均值時，由上式可得在此條件下可能發生之氣象災害L_c為：

$$L_c=\alpha\,\sigma_\theta^2 \quad\cdots\cdots(4)$$

因而可知，預報之利益為

$$L_c-L_f=\alpha\,\sigma_\theta^2\left\{2\,\frac{\sigma_f}{\sigma_\theta}\,r-\frac{\sigma_f^2}{\sigma_\theta^2}\right\} \quad\cdots\cdots(5)$$

如果預報有利益，即$L_c-L_f>0$，由此條件可得

$$r>\frac{1}{2}\,\frac{\sigma_f}{\sigma_\theta} \quad\cdots\cdots(6)$$

則預報準確率大於$\frac{1}{2}\frac{\sigma_f}{\sigma_\theta}$時，預報才有存在價值。如預報準確率小於$\frac{1}{2}\frac{\sigma_f}{\sigma_\theta}$，即失去其價值。又由(5)式可計算預報利益最大之條件為：

$$r=\frac{\sigma_f}{\sigma_\theta} \quad\cdots\cdots(7)$$

此式代入(5)式，可得預報最大利益Q為：

$$Q=\frac{L_c-L_f}{L_c}=\frac{\alpha\sigma_\theta^2\,r^2}{\alpha\sigma_\theta}=r^2 \quad\cdots\cdots(8)$$

由此式可知預報準確率各為30％、60％及90％等，其最大利益各為 9％、36％、81％。即最大利益以預報準確率之平方相等，因而預報準確率之提高，對於最大利益有其平方倍之貢獻。換言之，由防範之目的而言，預報之準確率應提高至80％以上，才對防範有顯著協助。

五、得 分 表

上述之準確率或技術得分，均須根據對某一氣象要素或天氣現象，作預報考核計算，而不適用於實際天氣預報之多種氣象要素及天氣現象，同時預報考核之用。關於各種氣象要素及天氣現象同時之考核，迄今尚無定論，惟世界氣象學界，多採用得分表為考核標準之考核方法。關於美國麻省與加省理工學院氣象系，所應用之得分表，已有萬寶康氏[19]之介紹，作者僅舉日本氣象廳之例，（如表二），以資參考。

茲應用得分表之天氣預報考核法，考核展期天氣預報結果舉例以資參考。如以表三中所示之得分表為考核標準，考核10月3日至11月9日之一星期預報，得如表四中所示。若計算第一天至第七天之預報準確率，可得如圖1中所示，即一星期天氣預報之準確率，預報第一天之成績為 89.5％相當好。但隨日期之經過準確率逐漸降落，第五天之預報準確率為 76.5％，但第六天之預報準確率反而增達80％。

表三：得分表

Table 3 : Scoring table

實測＼預報	晴	多 雲	陰	雨
晴	100	100	35	0
多 雲	100	100	65	35
陰	35	65	100	65
雨	0	35	65	100

表二：得分表
Table 2 : Scoring table

⦶：晴（雲　　量 7 及以下）
⦷：陰（上層雲量 8 及以上）
⊗：陰（中層雲量 8 及以上）
◎：陰（下層雲量 8 及以上）
● 雨
* 雪

實測 \ 預報	⦶	⦶ 偶 ⦷	⦶ 偶 ⊗	⦶ 偶 ◎	⦶ 偶 ●	⦷	⦷ 偶 ⦶	⦷ 偶 ⊗	⦷ 偶 ◎	⦷ 偶 ●	⊗	⊗ 偶 ⦶	⊗ 偶 ⦷	⊗ 偶 ◎	⊗ 偶 ●	◎	◎ 偶 ⦶	◎ 偶 ⦷	◎ 偶 ⊗	◎ 偶 ●	●	● 偶 ⦶	● 偶 ⦷	● 偶 ⊗	● 偶 ◎	◎ 偶 ●*
⦶	100	94	88	84	60	85	91	79	75	51	70	82	76	66	42	60	76	70	64	36	0	40	34	28	24	30
⦶ 偶 ⦷	94	100	94	90	66	91	97	85	81	57	76	88	82	72	48	66	82	76	70	42	6	46	40	34	30	36
⦶ 偶 ⊗	88	94	100	96	72	85	91	91	87	63	82	94	88	78	54	72	88	82	76	48	12	52	46	40	36	42
⦶ 偶 ◎	84	90	96	100	76	81	87	87	91	67	78	90	84	82	58	76	92	86	80	52	16	56	50	44	40	46
⦶ 偶 ●	60	66	72	76	100	57	63	63	67	91	54	66	60	58	82	52	68	62	56	76	40	80	74	68	64	70
⦷	85	91	85	81	57	100	94	94	90	66	85	85	91	81	57	75	79	85	79	51	15	43	49	43	39	45
⦷ 偶 ⦶	91	97	91	87	63	94	100	88	84	60	79	91	85	75	51	69	85	79	73	45	9	49	43	37	33	39
⦷ 偶 ⊗	79	85	91	87	63	94	88	100	96	72	91	91	97	87	63	81	85	79	85	57	21	49	55	49	45	51
⦷ 偶 ◎	75	81	87	91	67	90	84	96	100	76	87	87	93	91	67	85	89	95	89	61	25	53	59	53	49	55
⦷ 偶 ●	51	57	63	67	91	66	60	72	76	100	63	63	69	67	91	61	65	71	65	85	49	77	83	77	73	79
⊗	70	76	82	78	54	85	79	91	87	63	100	88	94	96	72	90	82	88	94	66	30	46	52	58	54	60
⊗ 偶 ⦶	82	88	94	90	66	85	91	91	87	63	88	100	94	84	60	78	94	88	82	54	18	58	52	46	42	48
⊗ 偶 ⦷	76	82	88	84	60	91	85	97	93	69	94	94	100	90	66	84	88	94	88	60	24	52	58	52	48	54
⊗ 偶 ◎	66	76	78	82	58	81	75	87	91	67	96	84	90	100	76	94	86	92	98	70	34	50	56	62	58	64
⊗ 偶 ●	42	48	54	58	82	57	51	63	67	91	72	60	66	76	100	70	62	68	74	94	58	74	80	86	82	88
◎	60	66	72	76	52	75	69	81	85	61	90	78	84	94	70	100	84	90	96	76	40	48	54	60	64	70
◎ 偶 ⦶	76	82	88	92	68	79	85	85	89	65	82	94	88	86	62	84	100	94	88	60	24	64	58	52	48	54
◎ 偶 ⦷	70	76	82	86	62	85	79	79	95	71	88	88	94	92	68	90	94	100	94	66	30	58	64	58	54	60
◎ 偶 ⊗	64	70	76	80	56	79	73	85	89	65	94	82	88	98	74	96	88	94	100	72	36	52	58	64	60	66
◎ 偶 ●	36	42	48	52	76	51	45	57	61	85	66	54	60	70	94	76	60	66	72	100	64	72	78	84	88	94
●	0	6	12	16	40	15	9	21	25	49	30	18	24	34	58	40	24	30	36	64	100	60	66	72	76	82
● 偶 ⦶	40	46	52	56	80	43	49	49	53	77	46	58	52	50	74	48	64	58	52	72	60	100	64	88	84	78
● 偶 ⦷	34	40	46	50	74	49	43	55	59	83	52	52	58	56	80	54	58	64	58	78	66	94	100	94	90	84
● 偶 ⊗	28	34	40	44	68	43	37	49	53	77	58	46	52	62	86	60	52	58	64	84	72	88	94	100	96	90
● 偶 ◎	24	30	36	40	64	39	33	45	49	73	54	42	48	58	82	64	48	54	60	88	76	84	90	96	100	94
◎ 偶 ●*	30	36	42	46	70	45	39	51	55	79	60	48	54	64	88	70	54	60	66	94	82	78	84	90	94	100

表四：考　核　表

Table 4 : Verification table

日　期	1	2	3	4	5	6	7	平　均
10月3～9日	100	65	65	100	35	35	35	62.1
6～12日	100	65	100	100	65	65	35	75.5
10～16日	100	65	65	100	100	100	100	90.0
13～19日	65	100	100	100	100	100	100	95.0
17～23日	65	100	100	65	100	35	35	71.3
20～26日	100	65	100	100	65	65	65	80.0
24～30日	100	100	35	65	100	100	35	76.3
10月27日～11月2日	65	100	100	35	65	100	100	80.5
10月31日～11月6日	100	65	65	65	100	100	100	85.0
11月3～9日	100	100	65	65	35	100	100	80.5
平　均	89.5	82.5	79.5	79.5	76.5	80.0	70.5	79.7

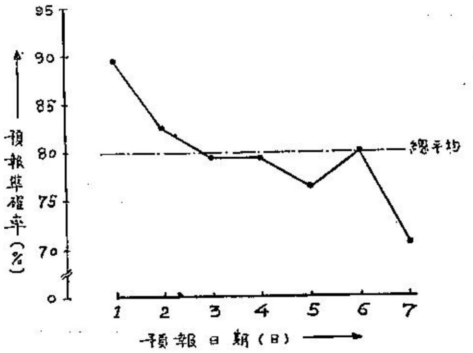

圖1：長期天氣預報之考核

Fig. 1: Verification of extending forecasts.

六、情報理論（Information theory）

(一) 情報量（Amount of information）

天氣預報是氣象情報，因此情報理論當然可以適用於其準確率之考核。任何情報均可以由其有無價值來分類，即情報可以分類爲有價值之情報，以及無價值之情報，玆舉例說明之；如果你有事訪問友人甲之公寓，假定此公寓爲6樓，而各樓有10個房間。你不知道友人所住之房間，到公寓大門後，首先遇到二位友人A及B，你即問他們，甲之房間位置，但友人A僅知道甲住在4樓，而僅知道甲住在第6號房間。你由此兩位友人供給你之情報綜合起來，可以知道甲是住在4樓6號房間。但你再遇到另一友人C，你再問他甲之房間位置，他即答你甲是住在4樓6號房間。友人C供應之情報，與友人A及B兩人供應之情報，有同等價值。玆令I_A，I_B及I_C爲A，B及C三位友人供應之情報量，可得：

$$I_C = I_A + I_B \quad \cdots\cdots(1)$$

A供應之情報是6樓中之1樓，此情報是有惑然率$\frac{1}{6}$之情報，玆以符號$I\left(\frac{1}{6}\right)$代表其情報價值，即B，C兩人供應之情報，同理可由$I\left(\frac{1}{10}\right)$及$I\left(\frac{1}{60}\right)$代表之。若考慮(1)式之關係可得：

$$I\left(\frac{1}{60}\right) = I\left(\frac{1}{6}\right) + I\left(\frac{1}{10}\right) \quad \cdots\cdots(2)$$

若擴張上述之思想，樓數之惑然率及各樓房間數之惑然率，各以x及y代表，即

$$I(x \cdot y) = I(x) + I(y) \quad \cdots\cdots(3)$$

若I以對數來代替可得

$$\log xy = \log x + \log y \quad \cdots\cdots(4)$$

由此可以知道，情報量可由惑然率之對數定義之。實際上，惑然率小於1，因而應加負符號，使得情報量變成爲正數。又情報量常爲惑然率$\frac{1}{2}$之情報爲單位，因而以2爲底之對數定義之。此種情報量之單位，稱之爲bit。玆令p爲惑然率，I爲情報量，即

$$I = -\log_2 p = \log_2 \frac{1}{p} \quad \cdots\cdots(5)$$

此公式在天氣預報價值評定之應用，舉例說明之：如果一個月30天中，有晴天25天，雨天5天，即晴天及雨天之惑然率各爲$\frac{25}{30}$及$\frac{5}{30}$，因此在此月中預報晴天且實測晴天時，此預報之情報量由(5)式及2爲底之對數表（表五），可得

$$-\log_2 \frac{25}{30} = \log_2 \frac{30}{25} = \log_2 30 - \log_2 25$$
$$= 4.90689 - 4.64386 = 0.26303 \text{ bits}$$

而預報雨天且實測爲雨天時，此預報之情報量爲

$$-\log_2\frac{5}{30}=\log_2 6=2.58496 \text{ bits}$$

此月中下雨係爲稀罕天氣現象，而晴天爲頻常天氣現象，因此同樣的準確天氣預報，下雨之預報比較晴天預報，有重大價值。

茲擧另一例：臺南 10 月 之平均 晴天繼續日數爲11.7天，而雨天繼續日數爲1.8天。因而每月平均預報晴天時，其預報準確率爲 86.7%。如果計算其準確晴天預報之情報量，即：

$$-\log_2\frac{11.7}{11.7+1.8}=\log_2\frac{135}{117}=\log_2\frac{15}{13}$$
$$=\log 15-\log 13$$
$$=3.90689-3.70044$$
$$=0.20645 \quad \text{bits}$$

而準確雨天預報之情報量爲

$$-\log_2\frac{1.8}{11.7+1.8}=\log\frac{135}{18}=\log_2\frac{15}{2}$$
$$=\log 15-\log 2$$
$$=3.90689-1.00000$$
$$=2.90689$$

即雨天之預報才有重大價值。

表五：二爲底之對數表

Table 5 : Logarithmic table for base 2.

X	$\log_2$X	X	$\log_2$X	X	$\log_2$X	X	$\log_2$X	X	$\log_2$X
1	0.00000	21	4.39232	41	5.35755	61	5.93074	81	6.33985
2	1.00000	22	4.45943	42	5.39232	62	5.95420	82	6.35755
3	1.58496	23	4.52356	43	5.42626	63	5.97728	83	6.37504
4	2.00000	24	4.58496	44	5.45943	64	6.00000	84	6.39232
5	2.32193	25	4.64386	45	5.49185	65	6.02237	85	6.40939
6	2.58496	26	4.70044	46	5.52356	66	6.04439	86	6.42626
7	2.80735	27	4.75489	47	5.55459	67	6.06609	87	6.44294
8	3.00000	28	4.80735	48	5.58496	68	6.08746	88	6.45943
9	3.16993	29	4.85798	49	5.61471	69	6.10852	89	6.47573
10	3.32193	30	4.90689	50	5.64386	70	6.12928	90	6.49185
11	3.45943	31	4.95420	51	5.67242	71	6.14975	91	6.50779
12	3.58496	32	5.00000	52	5.70044	72	6.16992	92	6.52356
13	3.70044	33	5.04439	53	5.72792	73	6.18982	93	6.53916
14	3.80735	34	5.08746	54	5.75489	74	6.20945	94	6.55459
15	3.90689	35	5.12928	55	5.78136	75	6.22882	95	6.56986
16	4.00000	36	5.16993	56	5.80735	76	6.24793	96	6.58496
17	4.08746	37	5.20945	57	5.83289	77	6.26679	97	6.59991
18	4.16993	38	5.24793	58	5.85798	78	6.28540	98	6.61471
19	4.24793	39	5.28540	59	5.88264	79	6.30378	99	6.62936
20	4.32193	40	5.32193	60	5.90689	80	6.32193	100	6.64386

(二) 熵 (Entropy)

上述各例，均爲每次準確預報所供應之情報量，如以月單位計算，在第一例中晴天爲25天，故其供應之情報量爲：

$$25\times 0.26303=6.57575 \text{ bits}$$

而雨天爲 5 天，故其供應之情報量爲：

$$5\times 2.58496=12.92480 \text{ bits}$$

因而；供應之總情報量爲

$$6.57575+12.92480=19.50055 \text{ bits}$$

但是預報總次數爲30次，故每次平均情報量爲

$$\frac{19.50055}{30}=0.65002 \text{ bits}$$

茲令 $\bar{I}$ 爲平均情報量，可得公式

$$\bar{I}=-\sum_{i} p_i \log_2 p_i \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

在情報理論中，平均情報量常稱之爲熵 (Entropy) 實際上，天氣預報有時不準確，會誘致情報量之損失，茲擴張上述之理論，計算其損失如下：

令天氣 x_i 發生之惑然率爲 $p(x_i)$ ，即其準確預報有情報量$\log_2\frac{1}{p(x_i)}$。若令預報天氣爲y_j而實測天氣爲 x_i 之惑然率爲 $p_{y_j}(x_i)$，即接到此天氣預報後，

天氣 x_i 的準確預報之情報量 I ，現可以寫成：

$$\log_2\left\{\frac{1}{p(x_i)}\right\}=I+\log_2\left\{\frac{1}{p_{yj}(x_i)}\right\}$$

故 $$I=\log_2\left\{\frac{p_{yj}(x_i)}{p(x_i)}\right\}\cdots\cdots\cdots(7)$$

玆令預報天氣爲 y_j 而實測天氣爲 x_i 之發生次數爲 $n(x_i y_j)$，即預報 y_j 後，x_i 之準確預報之情報量總量爲

$$n(x_i y_j)\log_2\left\{\frac{p_{yj}(x_i)}{p(x_i)}\right\}\cdots\cdots\cdots(8)$$

因此對於各種天氣預報 j 求其總和，可得對天氣 x_i 之情報總量。再對於實測天氣 i 求其總和，可得一定期間之總情報量。玆令N爲預報總次數而引用

$$\frac{n(x_i y_j)}{N}=p(x_i y_j)=p(y_j)\cdot p_{yj}(x_i)\cdots\cdots(9)$$

之關係，可以計算熵 $\bar{I}$ 爲

$$\begin{aligned}\bar{I}&=\sum_i\sum_j\frac{n(x_i y_j)}{N}\log_2\frac{p_{yj}(x_i)}{p(x_i)}\\&=\sum_i\sum_j p(x_i,y_j)\log_2\frac{p_{yj}(x_i)}{p(x_i)}\\&=\sum_i\sum_j p(y_j)\cdot p_{yj}(x_i)\log_2\frac{p_{yj}(x_i)}{p(x_i)}\\&=\sum_i\sum_j p(y_j)p_{yj}(x_i)\log_2 p_{yj}(x_i)\\&\quad-\sum_i\sum_j p(y_j)p_{yj}(x_i)\log_2\frac{1}{p(x_i)}\\&=\sum_i p(x_i)\log_2\frac{1}{p(x_i)}\\&\quad-\sum_i\sum_j p(y_j)p_{yj}(x_i)\log_2\frac{1}{p_{yj}(x_i)}\cdots\cdots(10)\end{aligned}$$

上式之第一項代表準確預報供應之情報量，而第二項代表預報錯誤誘致之情報量損失。容後擧例說明上式對於考核天氣預報之應用。

表六：列聯表

Table 6 : Contingency table

預報(j) / 實測(i)	晴	陰	雨	合　計
晴	13	6	3	22
陰	2	4	0	6
雨	0	0	3	3
合　計	15	10	6	31

某一氣象台之天氣預報成績，列如表六中之列聯表所示，即由表中之資料計算各項惑然率可得：

$$p(x_1)=\frac{22}{31}\qquad p(x_2)=\frac{6}{31}\qquad p(x_3)=\frac{3}{31}$$

$$p(y_1)=\frac{15}{31}\qquad p(y_2)=\frac{10}{31}\qquad p(y_3)=\frac{6}{31}$$

$$Py_1(x_1)=\frac{13}{15}\qquad Py_1(x_2)=\frac{2}{15}\qquad Py_1(x_3)=\frac{0}{15}$$

$$Py_2(x_1)=\frac{6}{10}\qquad Py_2(x_2)=\frac{4}{10}\qquad Py_2(x_3)=\frac{0}{10}$$

$$Py_3(x_1)=\frac{3}{6}\qquad Py_3(x_2)=\frac{0}{6}\qquad Py_3(x_3)=\frac{3}{6}$$

$$p(x_1y_1)=\frac{13}{31}\qquad p(x_1y_2)=\frac{6}{31}\qquad p(x_1y_3)=\frac{3}{31}$$

$$p(x_2y_1)=\frac{2}{31}\qquad p(x_2y_2)=\frac{4}{31}\qquad p(x_2y_3)=\frac{0}{31}$$

$$p(x_3y_1)=\frac{0}{31}\qquad p(x_3y_2)=\frac{0}{31}\qquad p(x_3y_3)=\frac{3}{31}$$

故上述各項惑然率代入(10)式，可以計算熵爲：

$$\begin{aligned}\bar{I}&=\frac{22}{31}\log_2\frac{31}{22}+\frac{6}{31}\log_2\frac{31}{6}+\frac{3}{31}\log_2\frac{31}{3}\\&\quad-\left\{\frac{15}{31}\times\frac{13}{15}\log_2\frac{15}{13}+\frac{10}{31}\times\frac{6}{10}\log_2\frac{10}{6}\right.\\&\quad\left.+\frac{6}{31}\times\frac{3}{6}\log_2\frac{6}{3}\right\}-\left\{\frac{15}{31}\times\frac{2}{15}\log_2\frac{15}{2}\right.\\&\quad\left.+\frac{10}{31}\times\frac{4}{10}\log_2\frac{10}{4}+\frac{6}{31}\times\frac{0}{6}\log\frac{6}{0}\right\}\\&\quad-\left\{\frac{15}{31}\times\frac{0}{15}\log_2\frac{15}{0}+\frac{10}{31}\times\frac{0}{10}\log_2\frac{10}{0}\right.\\&\quad\left.+\frac{6}{31}\times\frac{3}{6}\log_2\frac{6}{3}\right\}=1.133-0.780\\&=0.353\text{ bits}\end{aligned}$$

即預報完全準確時，可以供應 1.133 bits 之情報量，但是因爲預報之錯誤誘致 0.780 bits 之情報量損失，結果實際天氣預報僅供應 0.353 bits 之情報量。若計算此例之準確率 (Percent score) 及技術得分，各爲66%及38%。

(三) 情報比 (Information ratio)

天氣預報與實測天氣相互比較，而評定天氣預報準確率時，引用平均情報量（熵）尙感覺有不適當之處。即每月平均情報量（熵）數值，不完全一致，誘致每月預報準確率之比較，感覺困難。爲避免此缺點，將平均情報量規格化，而定義情報比 I_R 如下：

$$I_R=\frac{\sum_i\sum_j p(x_iy_j)\log_2\frac{p_{yj}(x_i)}{p(x_i)}}{\sum_i p(x_i)\log_2\frac{1}{p(x_i)}}\cdots\cdots\cdots(11)$$

若採用上式爲考核天氣預報之依據，即預報完全準確時，情報比爲 1 ，而預報完全錯誤時，情報比爲零。因而比較平均情報量爲適用於預報考核業務，同時對於每月準確率之比較也完全適用。

玆由表六中所示之例，計算情報比可得

$$I_R=\frac{0.353}{1.133}=0.312=31.2\%$$

七、預報報情量公式之研討

據第六章之理論，對於考核天氣預報時，可由預報情報量公式(10)及情報比公式(11)

$$\bar{I}=\sum_i p(x_i)\log_2\frac{1}{p(x_i)}-\sum_i\sum_j p(y_j)p_{y_j}(x_i)\log_2\frac{1}{p_{y_j}(x_i)}\cdots\cdots(10)$$

$$I_R=\frac{\sum_i\sum_j p(x_iy_j)\log_2\dfrac{p_{y_j}(x_i)}{p(x_i)}}{\sum_i p(x_i)\log_2\dfrac{1}{p(x_j)}}\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

計算情報量及情報比，以資考核天氣預報之依據。此種公式由 N. A. Bagrov [20]，正野重方[21]，岡本雅典[22]等學者計算，均得相等之結果。但應用上述公式，實地計算時發見有二種矛盾，容後舉例說明之。

(一) 如果天氣預報之成績，如列聯表七中所示，i = j 之各項均爲零，即天氣預報完全錯誤時，據(10)式及 (11) 式計算平均情報量 $\bar{I}$ 及情報比 I_R 時，可得：

$$\bar{I}=0.687$$

$$I_R=0.605$$

此種場合，預報完全錯誤，但由公式計算之情報量及情報比，相當保持高準確率，完全與事實不符。

表七：列聯表

Table 7 : Contingency table

實測 (i) \ 預報 (j)	晴	陰	雨	計
晴	0	21	1	22
陰	5	0	1	6
雨	2	1	0	3
計	7	22	2	31

(二) 另一例，如果天氣預報之成績，如列聯表八中所示，預報完全錯誤，而各種天氣之預報次數與其中一項完全一致時，由公式計算之平均情報量及情報比爲：

表八：列聯表

Table 8 : Contingency table

實測 (i) \ 預報 (j)	晴	陰	雨	計
晴	0	22	0	22
陰	0	0	6	6
雨	3	0	0	3
計	3	22	6	31

$$\bar{I}=1.13575$$

$$I_R=1$$

事實是預報完全錯誤；但計算之結果是表示預報完全準確。此種矛盾係因 $p_{y_j}(x_i)$ 中一項爲 1，其他兩項爲零（其對數當然爲零）所引起之矛盾。

茲避免上述兩種計算上之矛盾，將公式 (10) 及 (11) 中，消逝引起此兩種計算上矛盾之各項，而修正爲：

$$\bar{I}=\sum p(x_i)\log_2\frac{1}{p(x_i)}-\sum_{i\neq j}\sum p(y_j)p_{y_j}(x_i)\log_2\frac{1}{p_{y_j}(x_i)}$$

$$=\sum_i p(x_i)\log_2\frac{1}{p(x_i)}-\sum_{i\neq j}\sum p(x_i,y_j)\log_2\frac{1}{p(x_i)}$$

$$\therefore\ \bar{I}=\sum_{i=j}\sum p(x_iy_j)\log_2\frac{1}{p(x_i)}\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

而 $$I_R=\frac{\sum_{i=j}\sum p(x_iy_j)\log_2\dfrac{1}{p(x_i)}}{\sum_i p(x_i)\log_2\dfrac{1}{p(x_j)}}\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

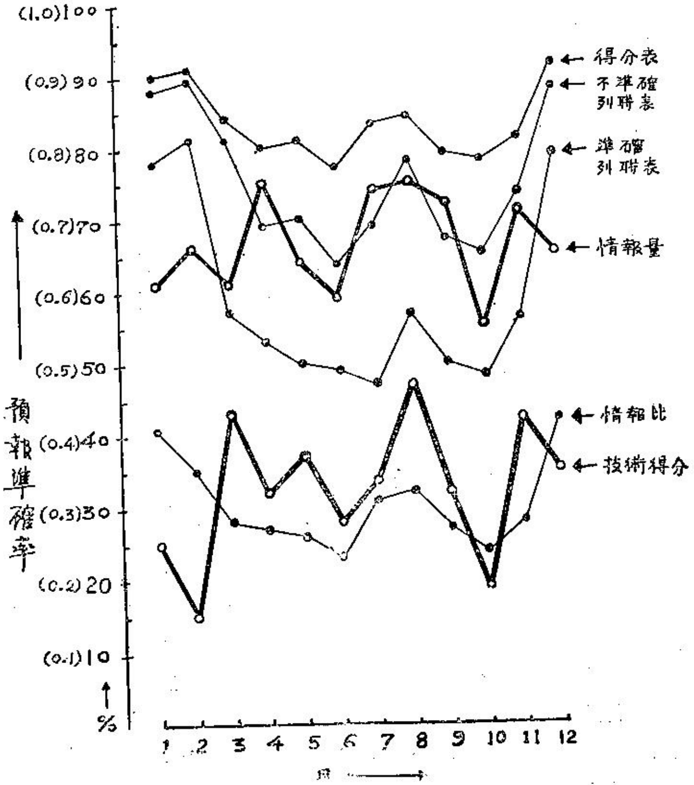

圖 2：短期天氣預報之考核

Fig. 2 : Verification of short range weather forecasts.

總之使用公式(12)及(13)，可避免上述之矛盾，以後考核天氣預報上，均使用(12)及(13)式而不使用(10)及(11)式。

八、各種天氣預報考核法之比較研討

圖2中所示者，以得分表、準確列聯表、不準確列聯表、情報量、情報比、技術得分等六種天氣預報考核方法，評定之月平均準確率變化圖。

由此圖可以看出，得分表、準確列聯表、不準確列聯表等考核法，其變化趨勢較相似。即冬季及夏季準確率較好，春季及秋季準確率較差之趨勢，完全一致，惟得分表之變化較小，而其他兩方法有變化較大之特點。

情報量考核法之季節變化，與上述三方法略有異，4、7、8、9及11月較高，而1、3、6及10月較低，得分表法較高之冬季及4月，用情報量法即較低。這是冬季天氣有持久性而春季天氣變化較激烈，因此用得分表法，冬季成績較好而春季即成績較差。但用情報量法時，天氣較穩定季節，情報價值較小，而天氣變化激烈季節，反而其情報價值較大，故與得分表法成爲相反之關係。

關於情報比，其變化情況與得分表法相似，1、2、7、8及12月成績較好，而6、10月較差。

技術得分比較其他方法，有特殊的變化趨勢，但大略與情報量之變化，較爲相似。

總之，由其季節變化分類，上述之六種天氣預報考核方法，可分爲兩類。得分表、準確列聯表、不準確列聯表、情報比等四種方法，均屬一種類。雖然其絕對值稍有所不同，但是其變化趨勢均相似。另外一類爲情報量及技術得分，此兩種之絕對值也很接近，變化趨勢也較相似。

參　考　文　獻

1. Köppen, W. (1884): Eine neue Methode der Prüfung der Wetterprognose. Met. Zeit. 1. pp 39-40.
   Köppen, W. (1884): Eine rationelle zur Prüfung der Wetterprognose. Met Zeit. 1. pp 397-404.
2. Klein. H. J. (1906): Die bisherigen Erfolge der Wetterprognose. Gaea. 42, pp 4-9.
   Klein. H. J. (1906): Misserfolge des staatlichen Wetterprognosendiensts in drei Monaten seines Bestehens. Gaea. 42, pp 641-652.
   Klein. H. J. (1907): Die Wahrheit über den Stand des Wetter Prognosenwesens. Gaea. 43, pp 157-167.
3. Schmanss, August (1911): Die Treffsicherheit. Das Wetter, 28 pp 68-71, 167-168.
4. Gilbert. J. P. (1884): Finley's Prediction. Amer. Met. Journ. 1, pp 166-172.
5. Doolittle. M.H.: The verification of prediction. Phil. Soc. Washington. Bull. 7, pp 122-127.
6. Clayton, H. H. (1893): Verification of weather forecast. Amer. Met. Journ. pp 211-219.
7. Grossmann, L. (1898): Die Stürm und die Strum Warungen an der deutschen Kunste in den Jahren 1886/1895. Deut. Seewarte Aus dem Arc. No. 4 pp 21.
8. Walz F. J. (1902): Verification of forecasts in U. S. Weatter Bureau. Second Convented of W. B O. Proc. Washington D. C. Bull. No. 3. pp 122-125.
9. Wallén Axel (1921): Sur la Controle des announees' des Ompetêss Geografiska Annaler. 3, pp 267-297.
10. Heidke, P. (1926): Berechnung des Erfolges und der Gute der Windstarkevorhersagen in Strumwariing dienst. Geographika Annaler 8, pp 314-349.
11. Muller. R. H. (1944): Verification of short range weather forecast. Bull. Amer. Met. Soc. 25, pp 18-25, 47-53, 88-95.
12. Gringorten I. (1950): Forecasting by statistical Inference. Jour. Met. 7, pp 388-394.
13. Brier. G. W. (1946): A study of quantative precipitation forecasting in the T.V A.

Basin. U. S. Department of Commerce. Weather Bureau Research paper 26.
14. Price Saul (1949): Phunderstorm today? Try a probability forecasts. Weatherwise. 2, pp 61-63, 67.
15. Klein William: An objective method of forecasting five-day precipitation of the Tennesse Valley. Research Paper. 9, Washington D. C. April 1949.
16. Thompson J. C. (1950): A numerical method of forecastirng rainfall is the Los Angeles area. Month. Weath. Rev. 78, pp 143-124.
17. Berkofsky L. (1950): An objective determinatien of probability of fog formations. Bull, Amer. Met. Soc. 37. pp 158-162.
18. William. Philip Jr. (1951): The use of confidence factor in forecasting. Bull. Amer. Met. Soc. 2, pp 278-281.
19. 萬寶康(1956)：天氣預報之考核問題，氣象學報第 2 卷第 2 期。
20. N. A. Bagrov：氣象與統計，第 8 卷 3 號、4 號。
21. 正野重方 (1958) ：天氣預報の適中率，天氣第 5 卷第 6 號，pp 173-178.
22. 岡本雅典：情報量Note，氣象與統計，第9卷 3 號、4 號。

氣象學報訂購辦法

一、本學報以促進中國氣象學術之研究為目的。
二、個人如欲訂購，可報請服務之單位，備文證明，連同價款，逕寄本社，或利用各地郵局，將書款存入臺灣郵政第2797號劃撥儲金本所專戶，當按址寄送所需之學報。
三、本學報本期暫收成本費新臺幣壹拾元，郵票十足通用。

氣象學報徵稿啓事

本學報長期徵收稿件，歡迎各方踴躍惠稿，惟為配合出版時期起見，惠稿最好於二、五、八、十一等月月中以前寄達，以便及時刊載，而免積壓，敬請惠稿諸先生注意。