

大規模凝結潛熱之釋放對於 大氣運動之影響

彭 立
PENG LI

The Effect of the Release of Large-Scale Latent Heat on Atmospheric Motions

Abstract

The effect of the release of large-scale latent heat on atmospheric motions is schematically discussed in a two-layer model of variable static stability. It is found that the effect of released latent heat is to increase the eddy available potential energy of the flow, to shift the most unstable baroclinic wave to the shorter wave length, and to magnify the attainable maximum intensity of unstable waves.

一、引 言

水汽雖在大氣中為量不多，但由於①水汽分子在吸收與放射輻射能方面之特性，②水汽的三相變換均可出現於大氣的溫度範圍內，③水汽相變換時所隨伴之大量潛熱，因之水汽在大氣的熱力和動力程序中佔有很重要的地位。例如，水汽的循環為控制世界氣候的主要因子之一；雲量的反射足以使大氣本身適當地調節其外來的能源；凝結潛熱之存儲與釋放控制了信風帶赤道輻射帶以及熱帶季風區的能的循環；赤道的雷雨雲更被認為是能量向上傳播的最有效的工具；蒸發與降水為海空相互作用中傳播能量的主要程序。凡此種種充份說明水汽在大氣的熱力和動力程序方面都扮演着一個重要的角色。

說來似乎奇怪，上述例證雖然說明了水氣的重要性，但是近代的大氣環流理論和數值天氣預報中却都沒有具體地把水汽現象考慮在內。仔細推究其原因却也極為自然。第一，近代大氣環流理論與數值天氣預報乃係以中緯度地帶的斜壓不穩定波理論為中心。以上各例大多屬於低緯度現象。在中高緯度地帶，水汽對大規模動力程序的影響，似不若其在低緯地帶之重要。而數值預報之適用範圍原本就只以中高緯地帶為對象。第二，水汽現象錯綜複雜，欲求適切地將其包括於環流理論與數值預報中，那是一個很不簡單的問題。所以即使在最新的以數值積分法研究大氣環流理論的實驗中，都沒有把水汽現象考慮在內。尤其在數

值天氣預報中，權衡得失時尚需顧慮到時間的經濟問題，那麼忽略水汽現象便更為當然了。第三，在旋轉的液體模型 (Dishpan or rotating cylinder experiments) 中並無任何與水汽現象相對應，但是一樣地能衍生極類似於大氣波的運動。由此可以想見水汽現象將僅能使大規模大氣運動產生量方面的修正而不致招致性質上的重大改變。事實上，現有短期數值天氣預報之相當成功，亦足為此說之有力證明。

由上可見，如若撇開局地的空氣運動不談而着眼於中緯度大規模空氣運動（大於或等於氣旋波範圍），我們可以說，與大規模空氣運動相偕而生的水汽凝結現象，將只能使空氣運動產生量的修正。我們現在進一步問一句，那將是怎樣的一個修正呢？由於水氣現象的複雜性，要回答這樣一個問題，仍然是很困難的。因為水汽在輻射作用上所引起之熱能變化遠不如它在凝結過程中所放出的熱能之強烈。兩者相比，前者往往可以略去。關於凝結潛熱對於大規模氣流之影響，曾有若干氣象學者（如 Manabe, Saito 與 Aubert 等）利用數值積分法計算凝結潛熱在垂直速度，等壓面之高度，以及位旋率方面所造成之變化。一般結論為：（1）凝結熱對於垂直運動之影響很重要，其所造成之變化最大可數倍於乾絕熱下之數值。（2）凝結潛熱對於等壓面高度與位旋率之影響在短期內（如12小時）不重要。可惜這種計算往往只延長至24小時為止，故凝結潛熱對於24小時以後大規模氣流型式之影響如何，尙未能有所瞭解。為求多方面

瞭解凝結潛熱對於大規模氣流之影響起見，本文不擬重複類似上述之計算而將從另外的角度去考察。具言之，即從有效位能 (Available potential energy) 之變化，最不穩定波長之改變，以及不穩定波之生命史去考察凝結潛熱可能產生之影響。為求簡易地達成此種目的起見，本文將利用 Lorenz 氏的二層可變靜力穩度的大氣模 (Two-layer model of variable static stability) 並僅着眼於大規模凝結潛熱之整體效果。

二、可變靜力穩度的二層大氣模

為下文之便利起見，茲先略介所用大氣模如下。

$$\text{令 } \mathbf{V} = \mathbf{K} \times \nabla \psi + \nabla \phi$$

$$\chi = - \int_0^p \phi(p) dp$$

在大規模氣流之情形下，熱力學第一律，旋率方程式，與平衡方程式可分別表之如下：

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -J(\psi, \theta) + \nabla \cdot \left(\theta \nabla \frac{\partial \chi}{\partial p} \right) - \frac{\partial}{\partial p} \left(\theta \nabla^2 \chi \right) + \frac{1}{c_p} \left(\frac{P_0}{p} \right)^\kappa \frac{dH}{dt} \dots \dots \dots (2.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi = -J(\psi, f + \nabla^2 \psi) + \nabla \cdot \left(f \nabla \frac{\partial \chi}{\partial p} \right) + \nabla \cdot \left[\Delta^2 \psi \nabla \frac{\partial \chi}{\partial p} + \nabla^2 \frac{\partial \chi}{\partial p} \nabla \psi - \frac{\partial}{\partial p} \left(\nabla^2 \chi \nabla \psi \right) \right] + \mathbf{K} \cdot \nabla \times \mathbf{F} \dots \dots \dots (2.2)$$

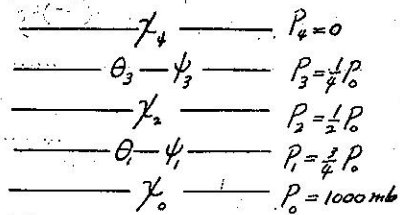
$$g \nabla^2 z = \nabla \cdot (f \nabla \psi) + \nabla \cdot (\nabla^2 \psi \nabla \psi - \frac{1}{2} \nabla (\nabla \psi \cdot \nabla \psi)) \dots \dots \dots (2.3)$$

其中 \mathbf{F} 為單位質量所受之摩擦力， $\frac{dH}{dt}$ 為單位質量所受之熱能， θ 為位溫， f 為科氏參數，

$$\kappa = \frac{R}{C_p} = 0.288$$

在二層大氣模中，令：

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_3 = \theta + \sigma \\ \theta_1 = \theta - \sigma \\ \theta_2 = \theta \\ \psi_3 = \psi + \tau \\ \psi_1 = \psi - \tau \\ \psi_2 = \psi \\ \chi_2 = \frac{P_0}{2} X \\ \chi_0 = \chi_4 = 0 \end{array} \right.$$



則上列方程式中之 $\frac{\partial}{\partial p}$ 代以相應兩層差商後，即得：

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -J(\psi, \theta) - J(\tau, \sigma) + \nabla \cdot \sigma \nabla X + Q \dots \dots \dots (2.4)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = -J(\psi, \sigma) - J(\tau, \theta) + \nabla \theta \cdot \nabla X + Q^* \dots \dots \dots (2.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi = -J(\psi, \nabla^2 \psi + f) - J(\tau, \nabla^2 \tau) + \nabla \cdot (\nabla^2 \tau \nabla X + \nabla^2 X \nabla \tau) + F_m \dots \dots \dots (2.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \tau = -J(\psi, \nabla^2 \tau) - J(\tau, \nabla^2 \psi + f) + \nabla \cdot f \nabla \chi + \nabla \cdot (\nabla^2 \psi \nabla X) + F_d \dots \dots \dots (2.7)$$

$$b C_p \nabla^2 \theta = \nabla \cdot f \nabla \tau + \nabla \cdot (\nabla^2 \psi \nabla \tau + \nabla^2 \tau \nabla \psi - \nabla (\nabla \psi \cdot \nabla \tau)) \dots \dots \dots (2.8)$$

其中 $b = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{3}{4} \right)^\kappa - \left(\frac{1}{4} \right)^\kappa \right]$,

$$F_m = \frac{1}{2} \mathbf{K} \cdot \nabla \times (\mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_1),$$

$$Q = \frac{1}{2 C_p} \left[4^\kappa \frac{dH_3}{dt} + \left(\frac{4}{3} \right)^\kappa \frac{dH_1}{dt} \right]$$

$$F_d = \frac{1}{2} \mathbf{K} \cdot \nabla \times (\mathbf{F}_3 - \mathbf{F}_1),$$

$$Q^* = \frac{1}{2 C_p} \left[4^\kappa \frac{dH_3}{dt} - \left(\frac{4}{3} \right)^\kappa \frac{dH_1}{dt} \right]$$

今將任一變量，例如位溫 θ ，表為三個分量之和

$$\theta = [\theta] + \theta' = [\bar{\theta}] + \theta^+ + \theta'$$

$[\bar{\theta}]$ 表示 θ 在一整個等壓面上之平均值， $[\theta]$ 表示 θ 沿一緯度圈之平均值，

$$\theta^+ = [\theta] - [\bar{\theta}],$$

$$\theta' = \theta - [\theta],$$

餘仿此。於是平均單位面積上位能 A 與平均單位面積上動能 K 可表示如下：

$$A = \frac{P_0 b C_p}{g([\bar{\sigma}] + [\bar{\sigma}]_m)} \left\{ [(\bar{\theta}')^2] + (\bar{\theta}^+)^2 + [(\sigma')^2] + (\sigma^+)^2 \right\} = A_z + A_o \dots \dots \dots (2.9)$$

$$K = \frac{P_0 b C_p}{g([\bar{\sigma}] + [\bar{\sigma}]_m)} \left\{ [(\theta')^2] + [(\sigma')^2] \right\} \dots \dots \dots (2.10)$$

$$A_z = \frac{P_0 b C_P}{g([\bar{\sigma}] + [\bar{\sigma}]_m)} \left\{ (\bar{\theta}^+)^2 + (\bar{\sigma}^+)^2 \right\} \quad (2.11)$$

其中

$$[\bar{\sigma}]_m = \left([\bar{\sigma}]^2 + (\bar{\theta}^+)^2 + (\bar{\sigma}^+)^2 + [(\bar{\theta}')^2] + [(\bar{\sigma}')^2] \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.12)$$

$$K = -\frac{1}{2} \frac{P_0}{g} \left\{ [\nabla\psi' \cdot \nabla\psi'] + [\nabla\tau' \cdot \nabla\tau'] \right\} = K_z K_e \quad (2.13)$$

$$K_z = -\frac{1}{2} \frac{P_0}{g} \left\{ [\psi'] \nabla^2 [\psi'] + [\tau'] \nabla^2 [\tau'] \right\} \quad (2.14)$$

$$K_e = -\frac{1}{2} \frac{P_0}{g} \left\{ [\psi' \nabla^2 \psi'] + [\tau' \nabla^2 \tau'] \right\} \quad (2.15)$$

A_e 是由於沿一定緯度圈上之 位溫差異而形成之有效位能, A_z 乃由於各緯度圈上之平均位溫在經度線方向之差異而形成。 K_z 是沿各緯度圈上度均風之動能, K_e 是各緯度圈上距平風之動能。為方便計以下我們將簡稱 A_e 為緯有效位能 (Eddy available P.E.), A_z 為經有效位能 (Zonal available P.E.), K_e 為緯動能 (Eddy K.E.), K_z 為經動能 (Zonal K.E.)。

可變穩度大氣模的最大優點為其中大氣的靜力穩定度是由大氣運動本身所控制, 而不是像普通大氣模之指定靜力穩度為一特定不變之值。因為在斜壓不穩定情形下, 熱能被不斷地向上傳播, 平均靜力不穩度應隨時間而增加。如果我們仍把它視為不變之定值, 結果將會過估能量之變換, 當我們的討論重點在大氣運動的能量變換時, 這一點是很量要的。

三、凝結潛熱對於有效位能之影響

利用上述簡單之大氣模, 大規模空氣運動中能量變換之方程式可求之如下。

由 (2.10) 式

$$\frac{dA_z}{dt} = \frac{2P_0 b C_P}{g} ([\bar{\sigma}] + [\bar{\sigma}]_m)^{-1} \left(\bar{\theta}^+ \frac{\partial \bar{\theta}^+}{\partial t} + \bar{\sigma}^+ \frac{\partial \bar{\sigma}^+}{\partial t} \right) - \frac{P_0 b C_P}{g} ([\bar{\sigma}] + [\bar{\sigma}]_m)^{-2} \left(\frac{d}{dt} [\bar{\sigma}] + \frac{d}{dt} [\bar{\sigma}]_m \right) \left\{ (\bar{\theta}^+)^2 + (\bar{\sigma}^+)^2 \right\}$$

利用 (2.4)、(2.5)、(2.8) 與 (2.12) 經過直率的但頗多繁雜的運算後上式可寫為:

$$\frac{dA_z}{dt} = -\{A_z \cdot A_e\} - \{A_z \cdot K_z\} + \{Q \cdot A_z\} \quad (2.16)$$

仿此由 (2.4) 至 (2.15) 可得

$$\frac{dA_e}{dt} = \{A_z \cdot A_e\} - \{A_e \cdot K_e\} + \{Q \cdot A_e\} \quad (2.17)$$

$$\frac{dK_z}{dt} = \{A_z \cdot K_z\} + \{K_e \cdot K_z\} - \{K_z \cdot D\} \quad (2.18)$$

$$\frac{dK_e}{dt} = \{A_e \cdot K_e\} - \{K_e \cdot K_z\} - \{K_e \cdot D\}$$

$$\text{其中 } \{K_z \cdot D\} = -\frac{P_0}{g} \left\{ [\psi'] (F_m) + [\tau'] (F_d) \right\}$$

$$\{K_e \cdot D\} = -\frac{P_0}{g} \left([\psi' F'_m] + [\tau' F'_d] \right)$$

分別代表 K_z 與 K_e 之摩擦消耗。

$$\begin{aligned} \{A_z \cdot A_e\} = & -\frac{P_0 b C_P}{g} ([\bar{\sigma}] + [\bar{\sigma}]_m)^{-1} \\ & \left\{ (\bar{\theta}' + \bar{\sigma}') (\psi'_x + \tau'_x - X_y)^+ \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\theta} + \sigma)^+ \right. \\ & + \left. \left((\bar{\theta}' - \bar{\sigma}') (\psi'_x - \tau'_x + X_y) \right)^+ \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\theta} - \sigma)^+ \right\} + \sigma^+ (\bar{\theta}' \nabla^2 X') + \frac{2P_0 b C_P}{g} \\ & ([\bar{\sigma}] + [\bar{\sigma}]_m)^{-1} - \frac{P_0 b C_P}{g} ([\bar{\sigma}] + [\bar{\sigma}]_m)^{-2} \\ & \left\{ [(\bar{\theta}^+)^2 + (\bar{\sigma}^+)^2] [\bar{\theta}' \nabla^2 X'] - [(\bar{\theta}')^2] \right. \\ & \left. + [(\bar{\sigma}')^2] \right\} \bar{\theta}^+ \nabla^2 X^+ \end{aligned}$$

代表 A_z 至 A_e 之轉變

$$\begin{aligned} \{K_e \cdot K_z\} = & \frac{P_0}{g} \left\{ \psi_y^+ \frac{\partial}{\partial y} (\psi'_x \psi'_y + \tau'_x \tau'_y)^+ \right. \\ & + \tau_y^+ \frac{\partial}{\partial y} (\psi'_x \tau'_y + \psi'_y \tau'_x)^+ \\ & + \psi_y^+ \frac{\partial}{\partial y} (\tau'_x X'_x - \tau'_y X'_y)^+ \\ & + \tau_y^+ \frac{\partial}{\partial y} (\psi'_x X'_x - \psi'_y X'_y)^+ \\ & \left. + \tau_y^+ \frac{\partial}{\partial y} (\psi'_y \nabla^2 X')^+ - X_y^+ \frac{\partial}{\partial y} (2\psi'_x \tau'_y)^+ \right\} \end{aligned}$$

代表 K_e 至 K_z 之轉變 (變數右下角之指數 x, y 表示 x, y 之偏微分)。

$$\{A_z \cdot K_z\} = -\frac{P_0 b C_P}{g} [\bar{\theta}^+ \nabla^2 X^+]$$

$$\{A_z \cdot K_0\} = -\frac{P_0 b C_p}{g} \overline{[\theta' \nabla^2 X']}$$

分別表示 A_z 至 K_z 與 A_0 至 K_0 之變換。

$$\{Q \cdot A_z\} = \frac{P_0 b C_p}{g} \left(\overline{[\sigma]} + \overline{[\sigma]_m} \right)^{-1} \left\{ 2 \overline{[\theta^+ Q^+]} + \overline{[\sigma^+ (Q^*)^+]} - \frac{(\overline{[\sigma^+]})^2 + (\overline{[\theta^+]})^2}{\overline{[\sigma]_m}} \overline{[Q^*]} \right. \\ \left. + \frac{\overline{[\theta' Q'] + \theta^+ Q^+ + [\sigma' (Q^*)'] + \sigma^+ (Q^*)^+}}{\overline{[\sigma]_m} + \overline{[\sigma]}} \right\}$$

$$\{Q \cdot A_0\} = \frac{P_0 b C_p}{g} \left\{ 2 \overline{[\theta' Q']} + \overline{[\sigma' (Q^*)']} \right. \\ \left. - \frac{\overline{[(\theta')^2]} + \overline{[(\sigma')^2]}}{\overline{[\sigma]_m}} \overline{[Q^*]} \right. \\ \left. + \frac{\overline{[\theta' Q'] + \theta^+ Q^+ + [\sigma' (Q^*)'] + \sigma^+ (Q^*)^+}}{\overline{[\sigma]} + \overline{[\sigma]_m}} \right\}$$

分別代表由於熱能之加入而產生之 A_z 與 A_0 。
 上列各式之導出，對於三個變量之相關，類似 $\overline{\psi' \tau_y' \nabla^2 \tau_x'}$ 者，因其通常甚小均予略去。

近代大氣環流理論及數值天氣預報均係以斜壓不穩定波為其理論中心，已如上述。在斜壓不穩定情形下，不穩定波發展時，動能之產生係以緯有效位能 A_0 為其直接泉源，故 A_0 之供應對運動之發展很有影響。現在讓我們特別注意 (2.17) 式中 A_0 之變化。在斜壓不穩定下 $\{A_z \cdot K_0\}$ 為正。 A_0 之來源為 $\{A_z \cdot A_0\}$ 與 $\{Q \cdot A_0\}$ 兩者。 $\{A_z \cdot A_0\}$ 在絕大多數情形下為正值，因為通常南下之空氣冷，北上之空氣熱，熱量係順沿着南北之溫度梯度而輸送。 $\{Q \cdot A_0\}$ 之重要部份一為凝結絕熱部份， $\{Q_L \cdot A_0\}$ ，一為輻射部份， $\{Q_R \cdot A_0\}$ 。後者因長波輻射下高溫空氣失熱多，低溫空氣失熱少，故為負值，它對 A_0 而言，實在是一個消耗而不是一個源泉。至於 $\{Q_L \cdot A_0\}$ 部份因凝結潛熱乃集中於對流層下層， Q^* 為負值，同時因為潛熱釋放多在暖區，而且是靜力穩度較小之區，是以 $\overline{[\theta' Q']}$ 與 $\overline{[\sigma' (Q^*)']}$ 均為正。加以一般情形下：

$$2 \left(\overline{[\theta' (Q^*)']} + \overline{[\sigma' (Q^*)']} \right) > \frac{\overline{[(\theta')^2]} + \overline{[(\sigma')^2]}}{\overline{[\sigma]} (\overline{[\sigma]} + \overline{[\sigma]_m})} \\ \left(\overline{[\theta' Q']} + \overline{[\sigma' (Q^*)']} + \overline{[\theta^+ Q^+]} + \overline{[\sigma^+ (Q^*)^+]} \right)$$

所以 $\{Q_L \cdot A_0\}$ 為正。故凝結潛熱是產生 A_0 的一個來源。一般說來， $\{Q_L \cdot A_0\}$ 比較 $\{A_z \cdot A_0\}$ 小得多。不過自 A_z 轉變來的 A_0 多不能即時轉變成 K_0 ，所以大部份消耗在長波輻射 $\{Q_R \cdot A_0\}$ 上。反過來，凝結潛熱之放出乃與上升運動相偕而生，故由 $\{Q_L \cdot A_0\}$ 而來之 A_0 立即經 $\{A_z \cdot K_0\}$ 而轉變為動能

。所以凝結潛熱所產生的 A_0 雖較 $\{A_z \cdot A_0\}$ 來的小得多，但是從產生 K_0 的效率而言，却是相當重要的。

四、凝結潛熱對於最不穩定波長及不穩波之生長率的影響

在斜壓不穩定理論中，我們常利用微波動理論 (Perturbation theory) 去決定不穩定波之範圍，生長率 (Growth rate)，以及最不穩定波之波長。以下我們將用那種方法來討論凝結潛熱對於最不穩定波及生長率之影響。

通常在濕絕熱程序下凝結潛熱之釋放集中於對流層之下層，而且與空氣之垂直上升速率成正比。因此為簡便計我們不妨假定 $Q = -A \nabla^2 X$ ， $Q^* = A \nabla^2 X$ 。通常情形下 700mb 混合比約為 12 g/kg， A 約等於 $12.5 \times \left(\frac{4}{3} \right)^{0.288} \text{ } ^\circ\text{C}$ 。注意此處係假定低壓槽線之前方空氣以濕絕熱程序上升，在低壓槽線之後方空氣以濕絕熱下降。在實際情形下槽後空氣多以乾絕熱下降，而槽前方也並非全部是濕絕熱上升。但這種差別僅使所得結果在量的方面有所修正，而一般性質上的結論仍然是可用的。現在讓我們把 (2.4) 至 (2.8) 中 ψ 、 τ 、 θ 、 σ 、 X 分別代以基本量 (Unperturbed quantities) 及其微變量 (Perturbation quantities)。即：

$$\left. \begin{aligned} \psi &\text{代以 } \psi_0(y) + \psi \\ \frac{\partial \psi_0}{\partial y} &= -U = \text{常數} \\ \tau &\text{代以 } \tau_0(y) + \tau \\ \frac{\partial \tau_0}{\partial y} &= -U^* = \text{常數} \\ \theta &\text{代以 } \theta_0(y) + \theta \\ \frac{\partial \theta_0}{\partial y} &= -\frac{f}{b C_p} U^* = \text{常數} \\ \sigma &\text{代以 } \sigma_0(y) + \sigma \\ \frac{\partial \sigma_0}{\partial y} &= \frac{1}{b C_p} \left(\frac{1 - \kappa}{2} \right) f U^*, \\ \kappa &= 0.288 \\ X &\text{代以 } \chi, \text{ 其基本量為零} \end{aligned} \right\} \dots (4.1)$$

同時假定所有微變量 ψ 、 θ ……等均與 $e^{ik(x-ct)}$ 成比例 ($k = \frac{2\pi}{L}$ ， C 為波速， L 為波長)，即 $\psi = \overline{\psi} e^{ik(x-ct)}$ ， $\theta = \overline{\theta} e^{ik(x-ct)}$ ，餘仿此。 $\overline{\psi}$ 、 $\overline{\theta}$ 等為微波幅，於是應用微波動理論，(2.4) 至 (2.8) 式分

別為：

$$\left. \begin{aligned} & -\frac{fU^*}{bC_P} \bar{\psi} + \frac{1-\kappa}{2bC_P} fU^* \bar{\tau} - (C-U) \bar{\theta} \\ & + U^* \bar{\sigma} - ik(\sigma_0 - A) \bar{X} = 0 \\ & + \frac{1-k}{2bC_P} fU^* \bar{\psi} - \frac{fU^*}{bC_P} \bar{\tau} + U^* \bar{\theta} \\ & - (C-U) \bar{\sigma} - ikA \bar{X} = 0 \\ & \{k^2(C-U) + \beta\} \bar{\psi} - k^2 U^* \bar{\tau} = 0 \\ & -k^2 U^* \bar{\psi} + \{\beta + k^2(C-U)\} \bar{\tau} \\ & - ikf \bar{X} = 0 \\ & -f \bar{\tau} + bC_P \bar{\theta} = 0 \end{aligned} \right\} \dots(4.2)$$

此為微波幅 $\bar{\psi}$ 、 $\bar{\tau}$ 、 $\bar{\theta}$ 、 $\bar{\sigma}$ 與 \bar{X} 等之聯立方程式。此聯立方程式有解之條件為其係數行列式等於零。於是我們得一頻率方程式如下：

$$(C-U)^3 + a_1(C-U)^2 + a_2(C-U) + a_3 = 0 \dots\dots\dots(4.3)$$

$$\begin{aligned} \text{其中 } a_1 &= -\frac{\beta}{k^2} \left(1 + \frac{r_1 - r_2}{1 + r_1}\right) + U^* \frac{r_3}{1 + r_1}; \\ a_2 &= \left(\frac{\beta}{k^2}\right)^2 \left(\frac{r_1 - r_2}{1 + r_1}\right) - (U^*)^2 \left(\frac{r_1 - 1}{1 + r_1}\right) \\ & + 2U^* \frac{\beta}{k^2} \frac{r_3}{1 + r_1} \\ a_3 &= - (U^*)^2 \frac{\beta}{k^2} \left(\frac{r_2}{1 + r_1}\right) + \left\{U^* \left(\frac{\beta^2}{k^2}\right) \right. \\ & \left. - (U^*)^3 \frac{r_3}{1 + r_1}\right\} \\ r_1 &= \frac{bC_P k^2}{f^2} (\sigma_0 - A), \quad r_2 = \frac{1-\kappa}{2\beta} \kappa^2 U^*, \\ r_3 &= \frac{bC_P k^2 A}{f^2} \end{aligned}$$

C-U 有虛根 (即不穩定波) 之條件為：

$$27a_3^2 - a^2 a_2^2 + 4a_1^3 a_3 - 18a_1 a_2 a_3 + 4a_2^3 > 0 \dots\dots\dots(4.4)$$

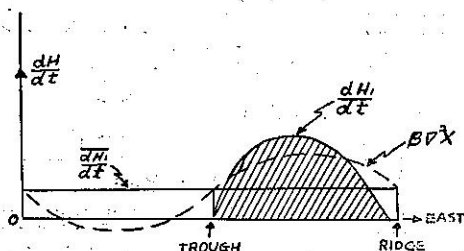
此不等式頗為複雜 (為 k 或 L 之高次多項式) 求解甚難。不穩定波之範圍, 生長率, 以及最不穩定波之波長可以數值方法自以上頻率方程式求得之。在中緯度通常之大氣情況下, 其結果顯示, 潛熱之效果將使最不穩定波移向較短波方面, 同時也使中緯度常溫之不穩定波之生長率增加。

五、凝結絕熱對於不穩定波生命史之影響

以下讓我們以一個理想的簡單例子來說明凝結絕熱對於不穩定波生命史之影響。假定在一東西氣流中 (速度 U(P) 僅為 P 之函數) 有細微之調和波發生。並假定這種波動在南北方向也是均勻的 (即與 e^{ikx}

成比例)。因為凝結絕熱集中於對流層之下部, 而且相對於槽線之分佈約如下圖之斜影部份所示, 我們不妨假定：

$$\begin{aligned} \frac{dH_3}{dt} &= 0 \\ \frac{dH_1}{dt} &= \frac{dH_1}{dt} + BV^2 X \\ \left(\frac{dH_1}{dt}\right) &\text{為沿緯度線之平均值, } B < 0 \end{aligned}$$



於是 (2.6) 式得

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi &= \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi - \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ & + \frac{\partial \tau_0}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \tau + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \tau}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial x} \right) \\ \text{或 } \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial v}{\partial x} &= -U^* \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v^*}{\partial x} \\ & - \beta v - \frac{\partial F}{\partial x} \end{aligned}$$

此處 $U = -\frac{\partial \psi_0}{\partial y}$, $U^* = -\frac{\partial F_0}{\partial y}$, $v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$,

$$F = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial X}{\partial x} \right)$$

因為 $v \propto e^{ikx}$ 上式亦可寫為：

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \left(U - \frac{\beta}{k^2} \right) \frac{\partial v}{\partial x} + U^* \frac{\partial v^*}{\partial x} + F \dots (5.1)$$

仿此由 (2.7) 式得：

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v^*}{\partial t \partial x} &= - \left(U - \frac{\beta}{k^2} \right) \frac{\partial v^*}{\partial x^2} - U^* \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ & - \frac{\partial F^*}{\partial x} + f \nabla^2 X \dots\dots\dots(5.2) \end{aligned}$$

此處 $v^* = \frac{\partial \tau}{\partial x}$, $F^* = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial x} \right)$

$$+ \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$$

應用 (2.1) 於中層 (即 $P = \frac{P_0}{2}$ 處) 得

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \theta &= \frac{fU^*}{bC} v + \sigma_0 \nabla^2 X \\ & - G + Q \dots\dots\dots(5.3) \end{aligned}$$

此處 $G = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma \frac{\partial X}{\partial x} \right)$

由 (2.5) 及 (2.8) 分別得

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \sigma = -U^* \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{f}{bC_P} U^* v^* - \frac{\partial \sigma_0}{\partial y} v + \theta_0 \nabla^2 X - G^* + Q^* \dots (5.4)$$

此處 $G^* = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\theta \frac{\partial X}{\partial x} \right) + \theta \nabla^2 X$

$$bC_P \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = f \frac{\partial v^*}{\partial x} \dots (5.5)$$

由 (5.3) 與 (5.5) 中消去 θ 得

$$\frac{f}{bC_P} \frac{\partial^2 v^*}{\partial t \partial x} = -\frac{f}{bC_P} U \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2} + \frac{f}{bC_P} U^* \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \sigma_0 \nabla^4 X - \nabla^2 G + \nabla^2 Q \dots (5.6)$$

令 $Q = \bar{Q} + \sigma_1 \nabla^2 X$, $\sigma_1 + \sigma_0 = \sigma_2$

將上式與 (5.2) 合併得

$$\frac{\partial v^*}{\partial t} = [-U + (1-r)C_r] \frac{\partial v^*}{\partial x} + U^*(2r-1) \frac{\partial v}{\partial x} - N \dots (5.7)$$

此處 $r = \frac{C_1^2}{C_1^2 + C_g^2}$, $C_1^2 = \frac{f^2}{k^2}$, $C_g^2 = \sigma_2 bC_P$,

$$C_r = \frac{\beta}{k^2} \dots (5.8)$$

$$N = (1-r)F^* + \frac{bC_P}{f} r \frac{\partial G}{\partial x} \dots (5.9)$$

以 $v \cdot \tau$ 與 v^* 分別乘 (5.1) 與 (5.7) 後求其沿 x 方向之平均值並簡化之得 (以下 $\bar{v^2}$ 表示 v^2 沿 x 方向之平均值, 餘仿此)

$$\frac{d}{dt} \frac{\bar{v^2}}{\tau} = k^2 U^* \bar{v\tau} - \bar{vF} \dots (5.10)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\overline{(v^*)^2}}{\tau} = k^2 (2r-1) U^* \bar{v\tau} - \bar{v^*N} \dots (5.11)$$

$$\frac{d}{dt} \bar{vv^*} = \beta \bar{r\tau} - \bar{v^*F} - \bar{vN} \dots (5.12)$$

$$\frac{d}{dt} \bar{v\tau} = (2r-1) U^* \bar{v^2} + U^* \overline{(v^*)^2} - r C_r \bar{vv^*} - \frac{1}{k^2} \left(v^* \frac{\partial F}{\partial x} - v \frac{\partial N}{\partial x} \right) \dots (5.13)$$

略去三變量之相關, 即得

$$\frac{d}{dt} \frac{\bar{v^2}}{\tau} = k^2 U^* \bar{v\tau} \dots (5.14)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\overline{(v^*)^2}}{2\tau} = k^2 (2r-1) U^* \bar{v\tau} \dots (5.15)$$

$$\frac{d}{dt} \bar{vv^*} = \theta r \bar{v\tau} \dots (5.16)$$

$$\frac{d}{dt} \bar{v\tau} = (2r-1) U^* \bar{v^2} + U^* \overline{(v^*)^2} - r C_r \bar{vv^*} \dots (5.17)$$

以上各式代表此簡單情形下波動能量, 有效位能與南北熱量輸送間之關係。為求明瞭波之發展起見微分 (5.17) 得:

$$\frac{d^2}{dt^2} \bar{v\tau} = k^2 [4(2r-1)(U^*)^2 - C_r^2 r^2] \bar{v\tau} + (2U^* \bar{v^2} - C_r \bar{vv^*}) \frac{dr}{dt}$$

其中 $\frac{dr}{dt}$ 可求得如後。取 (5.4) 沿 x 方向之平均值,

$$\frac{d\bar{\sigma}}{dt} = -\bar{\theta \nabla^2 X} + \bar{Q^*}$$

由 (5.2) 與 (5.6) 得 $\nabla^2 X = \frac{r}{f} \left\{ 2U^* \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - C_r \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2} \right\}$

由 (5.5) 得 $\theta = -\frac{f}{k^2 bC_P} \frac{\partial v^*}{\partial x} = \frac{f}{bC_P} \tau$

故 $\bar{\theta \nabla^2 X} = -\frac{rk^2}{bC_P} U^* \bar{v\tau}$

因此由 (5.8) 得

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{rbC_P}{C_1^2 + C_g^2} \left(\frac{2rk^2}{bC_P} U^* \bar{v\tau} + \bar{Q^*} + \frac{d\sigma_1}{dt} \right) \dots (5.19)$$

以 (5.19) 代入 (5.18) 式得

$$\frac{d^2}{dt^2} \bar{v\tau} = k^2 \left\{ 4(2r-1)(U^*)^2 - C_r^2 r^2 - \frac{2r^2 U^*}{C_1^2} (2U^* \bar{v^2} - C_r \bar{vv^*}) \right\} \bar{v\tau} - (2U^* \bar{v^2} - C_r \bar{vv^*}) \frac{bC_P r}{C_1^2 + C_g^2} \left(\bar{Q^*} + \frac{d\sigma_1}{dt} \right) \dots (5.20)$$

注意上式在乾絕熱情形下, 右方第二項為零。第一項 $\bar{v\tau}$ 之係數實際上就是不穩定之判別式。如此係數為正則波幅將依指數函數而增強, 反之如 $\bar{v\tau}$ 之係數為負則波幅將作中性振動。由於該係數含 $\bar{v^2}$ 與 $\bar{vv^*}$, 某一波動在某一時刻為不穩定或穩定並不僅由波長與不擾動前原來氣流之性質去惟一決定。對於一初生的不穩定波而言, $4(2r-1)(U^*)^2 - C_r^2 r^2 > 0$, $\bar{v^2}$ 最初非常小故該波之波幅將依指數而增大。但波幅增大的同時 $\bar{v^2}$ 亦隨之而增加, 因之右方第一項之係數隨之而減小 ($2U^* \bar{v^2} - C_r \bar{vv^*} > 0$), 最後波的強度終於到達某一程度使該係數由正而負。於是該波即開

始由不穩定而變為振動型，此時波之強度即為該不穩定波生命史上之所能到達之最大強度。由 (5·20) 式顯然可以看出，由於水汽潛熱之釋放，不穩定波生命史上的最大強度將因之而增加。蓋因水汽凝結潛熱之釋放集中於 500 mb 以下， Q^* 為負值，同時混合比因降水而逐漸減少 $\frac{dq_1}{dt}$ 亦為負值，所以 (20) 式右方第二項為正數。此即表示，波之終止其發展，必須待 (20) 式右方第一項變為負值而且其大小足以和第二項正值相抵消以後。換言之，凝結潛熱之效果將延伸不穩定波之發展，增大其生命史上可能達到之最大強度。

六、結 語

綜上所述，可知大規模凝結潛熱之釋放對於大氣運動有下列影響：

- (一) 增加氣流之緯有效位能，有利於動能之產生。
- (二) 使最不穩定波移向較短波，而且生長率增加。
- (三) 延伸不穩定波之發展，增大其生命史上可能到達之最大強度。

以上幾點結論僅基於粗略之理論。如欲求更進一步地估計各種影響之重要程度，則亟有待於更精深之研究。

氣象學報徵稿簡則

- 一、本刊以促進氣象學術之研究為目的，凡有關氣象理論之分析，應用問題之探討，不論創作或譯述均所歡迎。
- 二、本刊文字務求簡明，文體以白話或淺近文言為主體，每篇以五千字為佳，如長篇巨著內容特佳者亦所歡迎。
- 三、稿件請註明作者真實姓名、住址及服務機關，但發表時得用筆名。
- 四、譯稿請附原文，如確有困難亦請註明作者姓名暨原文出版年月及地點。
- 五、稿中引用之文獻請註明作者姓名、書名、頁數及出版年月。
- 六、惠稿請用稿紙繕寫清楚，並加標點。如屬創作論著稿，請附撰英文或法、德、西文摘要。
- 七、本刊對來稿有刪改權，如作者不願刪改時請聲明。
- 八、惠稿如有附圖務請用墨筆描繪，以便製版。
- 九、來稿無論刊登與否概不退還，如須退還者請預先聲明，並附足額退稿郵資。
- 十、來稿一經刊載即致稿酬，每千字按三十元至四十元計算。創作論著稿之特具價值者另議。
- 十一、惠稿文責自負。
- 十二、惠稿請寄臺北市公園路六十四號臺灣省氣象所氣象學報社收。