渦度方程式之介紹

徐明同

1. 緒　言

氣象學自引用數學的方法解釋後，許多學者多利用理想流體的運動方程式來表示非常複雜的大氣運動，而想積分此基本微分方程式。但因處於複雜的境界條件（Boundary Condition）之下，欲分解此運動方程式非常不容易。過去約三十年間，許多學者均向此方向努力，但終歸失敗。我們回想以往科學進步的歷史，每當遇到困難而不能解決的事項時，每再遵循另一觀點出發。例如氣體分子每一個體的運動原是非常複雜的，但因有了氣體運動論的概念，乃獲得很大的成果。而量子力學發見後，對於原子物理學始有發展等是。由此可見尋討現象之簡單而本質的因子是非常必要的。在氣象力學方面同樣情形即亦應尋覓此一本質的因子。Rossby 於1939年發見這因子，那就是對於絕對空間的渦度。換言之，即絕對渦度（Absolute Vorticity）。第二次世界大戰時，在美國曾以芝加哥大學爲中心而研究此絕對渦度的理論。關於渦度方程式（Vorticity Equation）的名稱於 1945年左右才開始使用。當美國應用渦度方程式研究偏西風波動的時候，另一方面1941年左右，日本正野氏亦創渦動波（Vortical Wave）的概念來研究颱風的理論。戰時陷於絕交的兩方，同樣引用一種新的概念，而做進一步的研究，從科學發達史的觀點看，可說是一件相當有趣的事實。

那麼渦度方程式究竟是什麼呢？

今日所謂渦度方程式可分爲三種，第一種是 Oberbeck於 1882年從運動方程式導出的，即

$$\frac{\partial u}{\partial t}-Zv=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}\text{，}\frac{\partial v}{\partial t}+Zu=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}\qquad(1.1)$$

上式符號中 Z 爲絕對渦度，$P=p+\frac{1}{2}\rho V^2$ 爲全壓。

Oberbeck 利用此方程式研究低氣壓，但他並不特別注意絕對渦度的概念，亦未强調此項的物理意義。其後1943年正野氏於研究變壓風（Isallobaric Wind）理論時才注意此絕對渦度垂直成分的重要性。

第二種同樣由運動方程式改變而來的。此式和流體力學之 Helmholtz 之方程式對應的。於1914年 Hesselberg 與 Friedmann 第一次引用於氣象學，即

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{Z_x}{\rho}\right)&=\frac{Z_x}{\rho}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{Z_y}{\rho}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{Z_z}{\rho}\frac{\partial u}{\partial z}\\
\frac{d}{dt}\left(\frac{Z_y}{\rho}\right)&=\frac{Z_x}{\partial}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{Z_y}{d}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{Z_z}{\rho}\frac{\partial v}{\partial z}\\
\frac{d}{dt}\left(\frac{Z_x}{\rho}\right)&=\frac{Z_x}{\rho}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{Z_y}{\rho}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{Z_z}{\rho}\frac{\partial w}{\partial z}
\end{aligned}\right\}\qquad(1.2)$$

上式符號中Z_x，Z_y 及Z_z 各爲絕對渦度的 x,y及 z 方向的成分，ρ爲密度。其後於1941年荒川氏用向量型式表示，即

$$\frac{\partial(\mathrm{rot}\mathbb{V})}{\partial t}+(\mathbb{V}\cdot\nabla)(\mathrm{rot}\mathbb{V}+2\omega)+(\mathrm{rot}\mathbb{V}+2\omega)\cdot\mathrm{div}\mathbb{V}-\{(\mathrm{rot}\mathbb{V}+2\omega)\cdot\nabla\}\mathbb{V}$$
$$=\mathrm{rot}\mathbb{K}+\frac{1}{\rho^2}[\nabla\rho\times\nabla P]\qquad(1.3)$$

上式符號，$\mathbb{V}$爲速度，ω爲地球廻轉之角速度，p爲氣壓，∇爲梯度（Gradient），div 爲輻散(Divergence)，rot 爲廻轉（Rotation），$\mathbb{K}$爲外力。(1.3) 式又可以表示如下。

$$\frac{d(\mathrm{rot}\mathbb{V}+2\omega)}{\partial t}+(\mathrm{rot}\mathbb{V}+2\omega)\cdot\mathrm{div}\mathbb{V}-\{(\mathrm{rot}\mathbb{V}+2\omega)\cdot\nabla\}\mathbb{V}=\mathrm{rot}\mathbb{K}+\frac{1}{\rho^2}[\nabla\rho\times\nabla\rho]\qquad(1.4)$$

上式中$\frac{d}{dt}$是運動質點之實質(Individual)微分，$\frac{\partial}{\partial t}$是局部（Local）微分，而兩者有下列關係，即

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{t\partial}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial t}+\mathbb{V}\cdot\nabla\qquad(1.5)$$

第三種是荒川氏導出的(1.4)式之垂直成分簡化的，或者由水平運動之方程式導出，即

$$\frac{dZ}{dt}+ZQ=N\qquad(1.4)$$

上式中Z爲絕對渦度垂直成分，Q爲水平幅散，N爲力管項 (Solenoid Term)。本文所謂渦度方程式，就是第三種型式。由此方程式 Rossby 於1939年研究無幅散，正壓 (Barotropic) 的場合得Z＝const.，而得到的偏西風波動之緯流 (Zonal Current) 風速，波長，傳播速度之關係。其後1940年 Haurwitz，1945年 Craig，1946年 Neamtan，1947年 Gambo 諸氏繼續研究乃獲逐漸發展此一理論。

2. 渦度方程式之導出及其意義

在廻轉地球上，Euler 流體力學之微分方程式，如假定空氣是非壓縮流體時，運動方程式可以用下式表示，即

$$\frac{d\mathbb{V}}{dt}+2(\omega\times\mathbb{V})=\mathbb{K}-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\nabla^2\mathbb{V} \qquad (2.1)$$

利用(1.5)式，(2.1)式可寫

$$\frac{\partial\mathbb{V}}{\partial t}+(\mathbb{V}\cdot\nabla)\mathbb{V}+2(\omega\times\mathbb{V})=\mathbb{K}-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\nabla^2\mathbb{V} \qquad (2.2)$$

上式中ν爲動黏度係數 (Coefficient of Kinematic Viscosity)，

$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 爲 Laplacian。

現在緯度ϕ之地點取x軸及y軸爲水平面內之東方和北方，取z軸爲垂直上方，而外力假定僅有氣壓梯度時(2.1)式用無向量表示，即

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial x}+2\omega\,(w\cos\phi-v\sin\phi)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\\
&\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}+2\omega u\sin\phi \qquad\qquad +-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\\
&\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}-2\omega u\cos\phi \qquad\qquad =-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}
\end{aligned}\right\} \qquad (2.3)$$

如再假定 w＝o，即二次元運動上式變爲

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}-\lambda v=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\\
&\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\lambda u=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}
\end{aligned}\right\} \qquad (2.4)$$

上式中$\lambda=2\omega\sin\phi$。

(2.4)式之上式對於y微分，下式對於x微分後，兩邊相減可得 $\frac{\partial Z}{\partial t}+u\frac{\partial Z}{\partial x}+v\frac{\partial Z}{\partial y}+ZQ=N$ (2.5)

或者 $\frac{dZ}{dt}+ZQ=N$ (2.6)

上式中$Q=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}$爲水平幅散，$Z=\zeta+\lambda$ 爲絕對渦度之垂直成分，$\zeta=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}$ 爲相對渦度。在廻轉地球上靜止的我們所觀測的渦度，即相對渦度 ζ。如 Coriolis 因子 $2\omega\sin\phi$ 由λ表示，那麼對於絕對空間之成分可用 $(\zeta+\lambda)$ 表示。此項稱爲絕對渦度之垂直成分，普通用Z表示。$N=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\right)$ $=\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial x}\right)=\frac{1}{\rho^2}J\left(\frac{\rho,p}{x,y}\right)$爲力管項，J爲 Jacobian 記號。

(2.5) 式和 2.6)式表示渦度之變化而稱爲渦度方程式。

設正壓， $N=O$， $\frac{dZ}{dt}+ZQ=O$， (2.7)

又設無幅散時 $Q=O$， $\frac{dZ}{dt}=O$積分之得， $Z=\zeta+\lambda=\text{Const.}$ (2.8)

(2.8) 式表示絕對渦度保存之法則 (Law of Conservation of Absolute Vorticity)。

利用向量表示，運動方程式爲

$$\frac{d\mathbb{V}}{dt}+2[\omega\times\mathbb{V}]=\mathbb{K}-\frac{1}{\rho}\nabla p \qquad (2.9)$$

或者 $$\frac{\partial\mathbb{V}}{\partial t}+(\mathbb{V}\cdot\nabla)\mathbb{V}+2[\omega\times\mathbb{V}]=\mathbb{K}-\frac{1}{\rho}\nabla p \qquad (2.10)$$

如運用 rot 於上式的兩邊，而用下列之關係，

$$\text{rot}\left(\frac{\partial \mathbb{V}}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}(\text{rot}\,\mathbb{V})$$

$$\text{rot}\,\{(\mathbb{V}\cdot\nabla)\mathbb{V}\}=(\mathbb{V}\cdot\nabla)\text{rot}\,\mathbb{V}-(\text{rot}\,\mathbb{V}\cdot\nabla)\mathbb{V}+\text{rot}\,\mathbb{V}.\text{div}\,\mathbb{V}$$

$$\text{rot}\,[\omega\times\mathbb{V}]=(\mathbb{V}\cdot\nabla)\omega-(\omega\cdot\nabla)\mathbb{V}+\omega\cdot\ \text{div}\,\mathbb{V}-\mathbb{V}\cdot\text{div}\,\omega$$

$$\text{rot}\left(\frac{1}{\rho}\nabla p\right)=\frac{1}{\rho}\text{rot grad } p+\text{grad}\frac{1}{\rho}\times\text{grad } p$$

$$=-\frac{1}{\rho^2}\text{grad }\rho\times\text{grad } p=-\frac{1}{\rho^2}[\nabla\rho\times\nabla p]$$

$$\text{div }\omega=0$$

我們可得渦度方程式如下

$$\frac{\partial(\text{rot}\,\mathbb{V})}{\partial t}+(\mathbb{V}\cdot\nabla)(\text{rot}\,\mathbb{V}+2\omega)+(\text{rot}\,\mathbb{V}+2\omega)\cdot\text{div}\,\mathbb{V}-\{(\text{rot}\,\mathbb{V}+2\omega)\cdot\nabla\}\mathbb{V}$$

$$=\text{rot }\mathbb{K}+\frac{1}{\rho^2}[\nabla\rho\times\nabla p]\qquad(2.11)$$

(2.11) 式和(1.3)式相同。

再用如下關係

$$\text{rot}\{(\text{rot}\,\mathbb{V}+2\omega)\times\mathbb{V}\}=(\mathbb{V}\cdot\nabla)(\text{rot}\,\mathbb{V}+2\omega)-\{(\text{rot}\,\mathbb{V}+2\omega)\cdot\nabla\}\mathbb{V}$$

$$+(\text{rot}\,\mathbb{V}+2\omega)\cdot\text{div}\,\mathbb{V}-\mathbb{V}\{\cdot\text{div}(\text{rot}\,\mathbb{V}+2\omega)$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}=0,\quad \text{div }\omega=0,\quad \text{div rot }\mathbb{V}=0$$

我們可得渦度方程式如下

$$\frac{\partial(\text{rot}\,\mathbb{V}+2\omega)}{\partial t}+\text{rot}\{(\text{rot}\,\mathbb{V}+2\omega)\times\mathbb{V}\}=\text{rot }\mathbb{K}+\frac{1}{\rho^2}[\nabla\rho\times\nabla P]\qquad(2.12)$$

由此可知此式包括(2.6)式。

從另一觀點，渦度方程式亦可同樣導出。我們知道 V. Bjerknes 的環流定理 (Circulation Theorem) 如下，即 $\frac{dc}{dt}=-\lambda\frac{ds}{dt}-\oint\frac{dp}{\rho}$ (2.13)

$C=\oint\mathbb{V}\cdot d\mathbb{r}$ 爲環流，ds爲面積素分

利用流體力學之 Stokes 定理〔即 $\oint\mathbb{V}\cdot d\mathbb{r}=\iint\text{rot}\,\mathbb{V}\cdot ds$〕, $C=\iint\zeta ds$ (2.14)

$$\therefore\quad \frac{dc}{dt}+\lambda\frac{ds}{dt}=\frac{d}{dt}\iint(\zeta+\lambda)ds$$

另外 $-\oint\frac{dp}{\rho}=-\oint\frac{1}{\rho}\text{ grad}p\cdot d\mathbb{r}=-\iint\text{rot}\left(\frac{1}{\rho}\text{grad}p\right)ds$

因此 $\frac{d}{dt}\iint(\zeta+\lambda)\,ds=-\iint\text{rot}\left(\frac{1}{\rho}\text{grad } p\right)ds$ (2.15)

茲假定下列 (1) 理想流體，(2) 正壓等條件力管項就等於零

$$\therefore\quad \frac{d}{dt}\iint(\zeta+\lambda)dS=0\qquad(2\ 16)$$

如斷面積 S=Const. $\zeta+\lambda=\text{Const.}$ (2.17)

與 (2.8) 式完全相同。

此式 Z 等於常數的意義是如比。例如某一渦管在運動時此渦管的 Z 維持常數，如與相隣的渦管比較，就有相差。

依照 Lagrange 流的想法，水平輻散等於流體素分的面積之膨脹率除面積，即 $Q=\frac{1}{S}\frac{dS}{dt}$ (2.18)

(2.18)入式代(2.7)式，可得 $\frac{dZ}{dt}+Z\frac{1}{S}\frac{dS}{dt}=0\quad\therefore\quad\frac{d}{dt}(ZS)=0$

因此 ZS=Const. (2.19)

此式表示渦管之面積S變小時，絕對渦度變大，而 S 變大時Z就變小。換言之，有水平輻散時絕對渦度減少，有水平輻合時，則絕對渦度增加。

又 Lagrange 流之連續方程式表示實質部分之質量等於一定，用數式表示，即 $\frac{d}{dt}(\rho SH)=0$ (2.20)

上式H爲渦管之高度。

(2.19) 式和 (2.20) 式可得 $\frac{d}{dt}\left(\frac{Z}{\rho H}\right)=0$

因此 $$\frac{Z}{\rho H}=\text{Const} \qquad (2.21)$$

(ρH) 爲單位面積氣柱(渦管)的重量，故等於上下面之氣壓差△p，

$$\therefore \frac{Z}{\triangle p}=\text{Const} \qquad (2.22)$$

設 $\triangle p_s=100\text{mb}$，$\lambda_s=10^{-4}\text{sec}^{-1}$(在緯度44°20' $\lambda=10^{-4}\text{sec}^{-1}$) 時，$\zeta$由$\zeta_s$表示之，

$$\frac{Z}{\triangle p}=\frac{\zeta_s+\lambda_s}{\triangle p_s} \quad \therefore \zeta_s=Z\frac{\triangle p_s}{\triangle p}-\lambda_s \qquad (2.23)$$

上式中ζ_s稱爲位渦 (Potential Vorticity)。

如上面所述，渦度方程式有種種的表示方法，由此可知渦度方程式是表示渦度變化之狀況。因取絕對渦度爲媒介而得簡單的表示法，結果成功且能把握現象的本質。我們如知道偏西風波動的理論，即知道這個概念及它所發揮約有效力量。由此渦度分析 (Vorticity Analysis)，渦度法 (Vorticity Method)，位渦 (Potential Vorticity) 等等之概念和方法遂得逐漸發展。

3. 渦度方程式之變形

由 (2.7) 式 $$\frac{\partial Z}{\partial t}+u\frac{\partial Z}{\partial x}+v\frac{\partial Z}{\partial y}+ZQ=0 \qquad (3.1)$$

設$\frac{\partial\lambda}{\partial y}=\frac{\partial(2\omega\sin\phi)}{\partial y}=2\omega\cos\phi\frac{\partial\phi}{\partial y}=\frac{2\omega\cos\phi}{R}\equiv\beta$，$\beta$爲 Rossby 因子。R爲地球半徑，(3·1)式可變爲

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+u\frac{\partial\zeta}{\partial x}+v\frac{\partial\zeta}{\partial y}+\beta v+(\zeta+\lambda)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0 \qquad (3.2)$$

設無輻散時，

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+u\frac{\partial\zeta}{\partial x}+v\frac{\partial\zeta}{\partial y}+\beta v=0 \qquad (3.3)$$

由$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$，設流線函數 (Stream Function) ψ，即

$$u=-\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v=\frac{\partial\psi}{\partial x} \qquad (3.4)$$

$$\zeta\equiv\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\equiv\nabla^2\psi \qquad (3.5)$$

(3.5) 式代入 (3.3) 式可得，

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right)\nabla^2\psi+\beta\frac{\partial\psi}{\partial x}=0 \qquad (3.6)$$

此式由 Haurwitz (1940年)，Craig (1945年)，Neamtan (1946年) 諸氏得到解。

現在設R爲地球半徑，θ爲餘緯度(Colatitude)，φ爲經度，u爲北南方向速度成分，v爲東西方向速度成分，ω爲地球廻轉的角速度而求球面座標表示的渦度方程式，

$$\zeta\equiv\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{R\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\cdot v)-\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right\}$$
$$=\frac{1}{R}\left\{\frac{\partial v}{\partial\theta}+v\cot\theta-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right\}$$

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\varphi\partial}{\partial t}$$

$$R\frac{\partial\theta}{\partial t}=u \qquad \therefore \frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{u}{R}$$

$$R\sin\theta\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial t}=v \qquad \therefore \quad \frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{v}{R\sin\theta}$$

因此， $$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\frac{u}{R}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{v}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

又 $$\frac{d}{dt}(2\omega\cos\theta)=-2\omega\sin\theta\cdot\frac{d\theta}{dt}=-\frac{2\omega}{R}\sin\theta\cdot u$$

依照絕對渦度保存之法則 (2.8) 式

$$\zeta+\lambda=\zeta+2\omega\cos\theta=\text{const.}$$

$$\therefore \quad \frac{d\zeta}{dt}+\frac{d\lambda}{dt}=0 \tag{3.7}$$

上面之關係，代入(3.7)式可得，

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{u}{R}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{v}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial\theta}+v\cot\theta-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)\frac{1}{R}-\frac{2}{R}\omega u\sin\theta=0$$

$$\therefore \quad \left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{u}{R}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{v}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\varphi\partial}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial\theta}+v\cot\theta-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)=2\omega u\sin\theta \tag{3.8}$$

Haurwitz，Craig，Neamtan諸氏由 (3.8) 式而論球面座標之場合。

又於1949年 Charney 與 Eliassen 考慮有力管項之場合。如地衡風 (Geostrophic Wind) 代λ (2.6)式Q變為零，所以他們先把 (2.6) 式做適當的變形後而代入地衡風。這個步驟稱為準地衡風近似 (Quasi-geostrophic Approximation)，即 (2.6) 式之N由地衡風近似而變形後再省略微小項，

於地衡風 $$u=-\frac{1}{\rho\lambda}\frac{\partial p}{\partial y}, \qquad v=\frac{1}{\rho\lambda}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{3.9}$$

(3.9) 式代入 (2.6) 式之N可得，

$$N=\frac{1}{\rho_2}\left\{\frac{\partial\rho}{\partial x}(-\rho\lambda u)-\frac{\partial\rho}{\partial y}(\rho\lambda v)\right\}=-\frac{\lambda}{\rho}\left(u\frac{\partial\rho}{\partial x}+v\frac{\partial\rho}{\partial y}\right) \tag{3.10}$$

那麼 (2.6) 式變為

$$\frac{d}{dt}(\zeta+\lambda)+(\zeta+\lambda)Q+\frac{\lambda}{\rho}\left(u\frac{\partial\rho}{\partial x}+v\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)=0 \tag{3.11}$$

茲假定$\zeta \ll \lambda$，且省略微小項ζQ，然後由向量形式表示，且∇_H為二次元向量運算素

$$\frac{d}{dt}(\zeta+\lambda)+\lambda\nabla_H\cdot\mathbb{V}+\frac{\lambda}{\rho}\mathbb{V}\cdot\nabla_H\rho=0$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dt}(\zeta+\lambda)+\frac{\lambda}{\rho}\nabla_H\cdot(\rho\mathbb{V})=0 \tag{3.12}$$

取上式之質量平均，$\frac{1}{p_0}\int_0^{p_0}\frac{d}{dt}(\zeta+\lambda)\,dp=\overline{\frac{d}{dt}(\zeta+\lambda)}$

$$\frac{1}{P_0}\int_0^{p_0}\frac{d}{dt}(\zeta+\lambda)dp+\frac{1}{p_0}\int_0^{p_0}\frac{\lambda}{\rho}\nabla_H\cdot(\rho\mathbb{V})dp=0$$

$dp=-\rho g dz$ 代入上式第二項，

$$\overline{\frac{d}{dt}(\xi+\lambda)}=\frac{g\lambda}{p_0}\int_\infty^0\nabla_H\cdot(\rho\mathbb{V})dz=0 \tag{3.13}$$

依照 Bjerknes 之趨勢方程式 (Tendency Equation)，

$$\frac{\partial p_0}{\partial t}=-g\int_0^\infty\nabla_H\cdot(\rho\mathbb{V})dz+g\rho_0 w_0 \tag{3.14}$$

(3.14) 式代入 (3.13) 式可得，

$$\overline{\frac{d}{dt}(\zeta+\lambda)}=\frac{\lambda}{p_0}\left(\frac{\partial p_0}{\partial t}-g\rho_0 w_0\right)=\frac{\lambda}{p_0}\frac{\partial p_0}{\partial t}-\frac{\lambda}{H}w_0 \tag{3.15}$$

上式中添字o表示地面值，$H=\frac{p_0}{g\rho_0}$為均勻大氣之高度 (Height of Homogeneous Atmosphere)。

Charney 與 Eliassen 把渦度方程式由 (3.15) 式表示，再做若干假定，利用小擾動法 (Small Perturbation Method) 求出線型微分方程式，然後再利用 Fourier 級數積分之，而試用於偏西風擾亂之數値預報，而得到良好的成績。

4. 渦度方程式之應用實例

（1） 越過赤道的氣流運動

假定氣流的運動無輻散，由 (2.8) 式可得 $\frac{dZ}{dt}=\frac{d\zeta}{dt}+\frac{d\lambda}{dt}$

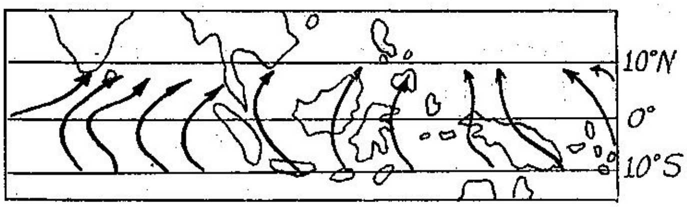
$$\frac{d\lambda}{dt}=\frac{d}{dt}(2\omega\sin\phi)=2\omega\cos\phi\frac{d\phi}{dt}=2\omega\cos\phi\frac{v}{R}$$

v 爲向北極之速度成分。

上式代入 (2.6) 式，即 $\frac{d\zeta}{dt}=-\frac{2\omega\cos\phi}{R}v-(\zeta+2\omega\sin\phi)Q$ (4.1)

現因Q＝O，且ϕ＝O，故 $\frac{d\zeta}{dt}=-\frac{2\omega}{R}v$ (4.2)

由 (4.2) 式可知如氣流由南向北進行，氣塊之渦度減少。所以自南半球出發時渦度爲零之氣塊，到達北半球時，此氣塊有負渦度。反之，由北半球出發的氣流如越過赤道，流至南半球時，就有正渦度。換言之，双方的場合，均有高氣壓性渦度，如無視水平之切力(Shear)就有高氣壓性曲率。印度夏季的季風就是其例。因夏季在亞洲大陸有溫暖的低壓部，所以南半球之東南信風的分流，越過赤道時，就有高氣壓性之轉彎，如第一圖在印度即形成西南季風。



第一圖　七月之流線

（2） 越過山脈之氣流

當廣濶而正直的氣流越過山脈時，在下風之方向形成流線之谷線，可見於日常天氣圖中。現假定有一簡單的場合，即氣流由西向東進的直線帶狀流而氣流中無水平方向之切力。且如第二圖表示山脈和氣流成垂直，地球表面無摩擦。那麼地表面附近之空氣素分，在山前就上昇，山後就下降。若大氣之成層安定時，某一高層之流線可假定爲不受障礙物之影響。此層以下之氣流，在山前愈近山頂，垂直收縮愈大，而發生水平輻散。在山後之氣流發生垂直伸展和水平輻合。此時渦度之變化可用下式表示，即由 (4.1) 式

$$\frac{d\zeta}{dt}=-\frac{2\omega\cos\phi}{R}v-(\zeta+2\omega\sin\phi)Q$$

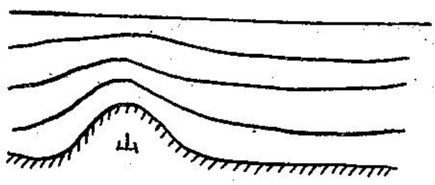
依照假定氣流爲直線帶狀流，故 v＝O

$$\frac{d\zeta}{dt}=-(\zeta+2\omega\sin\phi)Q \qquad (4.3)$$

由 (4.3) 式可知在山前因水平輻散爲正，所以空氣素分可得高氣壓性之渦度。又在山後，因水平輻散爲負，所以空氣素分可得低氣壓性之渦度。因我們假定氣流到達山脈以前，氣流爲直線帶狀流，即氣流無曲線率和切力，所以氣流由山前上昇時增加高氣壓性之渦度，於抵達山頂時爲極大，在山後時減小。如 (4.3) 式完全成立，空氣素分於上昇時所得之渦度，至下降時即告消失而空氣素分如第二圖由斷線所表示，一直離開山。但另一方面空氣素分得高氣壓性渦度時，同時得到向南之速度成分。因此氣流之變形就依照 (4.1) 式。即因V＜O，通常 (4.1) 式右邊第一項是正，而到達山頂爲至有受輻散之影響，但第二項比第一項爲小。過了山頂 (4.1) 式右邊第一項及第二項均爲同符號，所以空氣素分下降時比上昇時可得更多之渦度，因此如第二圖所示，氣流帶有低氣壓性之曲率而離開山脈。

（3） 帶狀流之擾動

J. Bjerknes 於1937年，曾利用帶狀流擾亂的理論而定性的研究溫帶低氣壓之運動。此後定量的研究便首先由 Rossby 於1939年行之，而於1940年Haurwitz 擴展 Rossby 的理論。接着又有許許多多的研究，例如19



44年 J.Bjerknes 與 J. Holmboe，1945年 Holmboe 等，Riehl，Craig，1946 年 Neamtan 1947 年 Gambo 等等。茲將Rossby 及 Haurwitz的理論介紹如下。

前面說過 Rossby 假定均勻水平氣流，無輻散運動，且不受摩擦影響時，由絕對渦度保存之法則出發。由

(2.8)式 $\frac{d\zeta}{dt}+\frac{d\lambda}{dt}=0$ 設 $\beta=\frac{\partial\lambda}{\partial y}=\frac{2\omega\cos\phi}{R}$

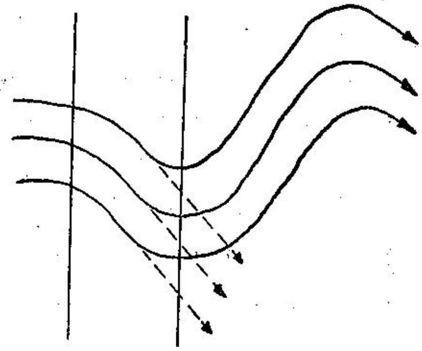
(4.1) 式變爲， $\frac{d\zeta}{dt}=-\beta v$ (4.4)

於(4.4)式中，我們假定沿緯度圈由一定速度U，而流的氣流，有小擾動 u'，v'之場合

$$u=U+u', \quad V=v'$$

因U與x及y無關， $\zeta=\zeta'=\frac{\partial v'}{\partial x}-\frac{\partial u'}{\partial y}$

由 (4.4) 式 $\frac{\partial\zeta}{\partial t}+u\frac{\partial\zeta}{\partial x}+v\frac{\partial\zeta}{\partial y}=-\beta v$



第 二 圖

代入上例關係可得， $\frac{\partial\zeta}{\partial t}+U\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\left(u'\frac{\partial\zeta}{\partial x}+v'\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)=-\beta v'$ (4.5)

利用小擾亂體，(4.5) 式左邊括弧內因其量微小可予省略，(4.5) 式變爲

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+U\frac{\partial\zeta}{\partial x}=-\beta v' \tag{4.6}$$

由此偏微分方程式而求波速C及波長L之關係，設下列假定，

（a） 擾動波之波形不變而進行，且向東之波速爲C $\frac{d\zeta}{dt}=0$ 或 $\frac{\partial\zeta}{\partial t}=-C\frac{\partial\zeta}{\partial x}$

（b） 擾動波與y方向無關，即南北可形無限廣濶， $\frac{\partial u}{\partial y}=0$ $\therefore\ \zeta=\frac{\partial v'}{\partial x}$

（c） 擾動波爲波長L之正弦波 $v'=v_{o}\ \sin\frac{2\pi}{L}(x-ct)$

利用以上三個假定時，(4.6) 式變爲非常簡單。即由假定 (a) $(U-C)\frac{\partial\zeta}{\partial x}=-\beta v'$

由假定 (b) $(U-C)\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2}=-\beta v'$

由假定 (c) $\frac{4\pi^2}{L^2}(C-U)-\beta=0$

即 $$C=U-\frac{\beta L^2}{4\pi^2} \tag{4.7}$$

由上式如已知擾動波之波長L，即可求波速C。於(4.7)式C＝O，即停留波之波速假定爲L_s，

$$L_s=2\pi\sqrt{\frac{U}{\beta}} \tag{4.8}$$

由 (4.7) 式和 (4.8) 式可得， $C=U\left(1-\frac{L^2}{L_s^2}\right)$ (4.9)

由上式可知，比L_s更長的擾動波，C＜O，故此波向西進行。比L_s短的擾動波C＞O，故向東進行。此關係對於大氣構造之研究非常重要。

此後於1940年 Haurwitz 擴充 Rossby 的理論。假定y方向有有限的廣幅。由 (3.6) 式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right)\nabla^2\psi+\beta\frac{\partial\psi}{\partial x}=0$$

和 Rossby 之理論相同，假定 $u=U+u'$，$V=v'$

而適用小擾動法可得 $$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}\right)\nabla^2\psi+\beta\frac{\partial\psi}{\partial x}=0 \tag{4.10}$$

求上式時設解 $$\psi = C\cos\frac{2\pi}{D}y\cos\frac{2\pi}{L}(x-ct) \qquad (4.11)$$

但D爲擾動之廣幅。(4.11) 式代入 (4.10) 式即可得

$$C = U - \frac{\beta L^2}{4\pi^2}\frac{D^2}{D^2+L^2} = U - \frac{\beta L^2}{4\pi^2}\frac{1}{1+\frac{L^2}{D^2}} \qquad (4.12)$$

設停留波之波長爲L'_s， $$L'_s = 2\pi\sqrt{\frac{U(1+L'^2_s/D^2)}{\beta}} \qquad (4.13)$$

由上面所述而知，有了渦度方程式之概念以後，偏西風波動之理論乃逐漸發達。至其他亦須加以考慮者，如摩擦之影響，外力之影響等，則因這些理論不是本文之目的，不再詳述。

(4) CAV 流跡法 (Constant Absolute Vorticity Trajectory Method)

實際上，上層之擾動波並非如 Rossby 所假定的正弦波。所以需要更一般性的方法來處理此一問題，於1940年 Rossby 把相對渦度ζ由$\frac{V}{r}$近似，而提案絕對渦度一定的流跡線，即CAV流跡線而應用於繪製天氣預報圖 (Prognostic Weather Chart)

相對渦度ζ由極座標表示時， $$\zeta = \frac{\partial V}{\partial n} + \frac{V}{r} \qquad (4.14)$$

上式中r爲流線之曲率半徑，n爲流線的法線方向之長度，V爲氣流之速度。

相當發達之帶狀流，水平切力可以不顧，即 $\frac{V}{r} \gg \frac{\partial V}{\partial n}$

所以絕對渦度保存之法則變爲 $$\frac{V}{r} + \lambda = \text{Const.} \qquad (4.15)$$

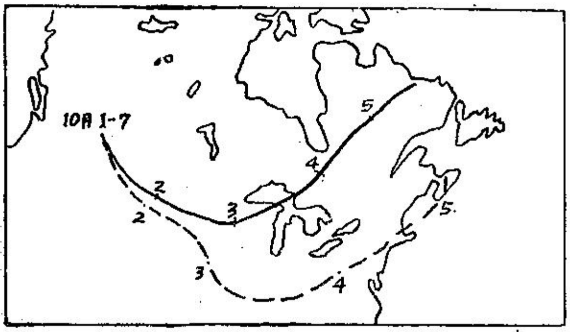
在定常狀態時，流線和流跡線是一致的，所以 r 也可說是流跡線之曲率半徑。

現在於緯度ϕ_0時，假定$\lambda = \lambda_0$，且曲率變爲無限大，則 $$\frac{V}{r} = \lambda - \lambda_0 \qquad (4.16)$$

又λ之緯度變化由一次式置換， $$\lambda = \lambda_0 + \beta y \qquad (4.17)$$

那麼 (4.16) 式變爲 $$\frac{V}{r} = -\beta y \qquad (4.18)$$

積分(4.18) 式就可得正確的流跡線，但通常利用 Bellamy之計算尺或者 Hess 與 Femenko 之計算表，即可劃出流跡線。於1945年Fultz 把實際流跡線和計算的 CAV 曲線做比較，而得到如第三圖之結果。圖中實線表示 CAV 曲線，斷線表示實際流跡線。由圖可知1日至3日相當一致，3日以後有偏差，但曲線之趨勢仍是相當一致的。



第 三 圖

其餘關於颱風之發生及其發達之理論，低氣壓之併合等，正野諸氏曾利用渦度從事解釋。又位渦解析之方法，各方面尚在研究階段，未能詳細介紹。

5 結 語

如上面所述，只管渦度方程式的方法，可說在運動學的領域內。因此只能斷定現象的可能性，而不能斷定它的必然性。但現代高空觀測逐漸發展，可藉此媒介，達到更有效的結果。這步驟雖在運動學的領域內，但在 Petterssen 之所謂運動分析 (Kinematical Analysis) 却進步多了。本文係筆者一年來關於渦度方程之理論調查所得，把它綜合起來共讀者參考的。渦度方程式可說是最近氣象學之基礎，今日所謂偏西風，噴射氣流(Jet Stream)，Blocking 現象，大氣環流，數值預報等之理論均由此出發。筆者才識淺陋，謬誤之處，尚盼讀者多多指教。 (參考文獻見7頁)