

絕對旋率平流在天氣預報方面之應用及原理 湯彩

摘要

推廣絕對旋率平流理論，將其應用於天氣預報方面，諸如高空絕對旋率及等變高中心之導流，地面氣壓系統之發展及降水等。

I 導言

近年來各國氣象界正在從事「數值預報」之研究及試驗，從動力氣象之觀點出發，給以合理的假定，利用嚴密的數字方法和物理學的涵義，來解答天氣預報的困難，例如高空氣流，氣旋發展及降水等，為氣象界當前最有興趣的問題。數值預報所涉及的當然是一大串的數學方程式，從這些複雜方程式尋求最後解答的方法當然是利用電子計算機。然而電子計算機不是每一個預報單位均能具備，目前如能簡化變通使用，盡量由數學公式來接近，用圖解法或較簡單的，機械式的方法由人工來計算，也能達到頗為圓滿的解答。月前東京美軍氣象中心一行數人來臺演講亦曾提及，惟本文著重對絕對旋率平流在天氣預報應用方面之原理，加以介紹，並對應用時概略要點予以說明。

若吾人考慮一平面上之運動，其環流方程式之最簡單的形式如下：

$$\frac{dc_a}{dt} = N_{a,p}$$

式中 C_a 為絕對環流， $N_{a,p}$ 為力管數。設此環流之面積範圍為 δA ，則上式可

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\delta c_a}{\delta A} \delta A \right] = \frac{d}{dt} \left[\frac{\delta c_a}{\delta A} \right] \delta A + \left(\frac{\delta c_a}{\delta A} \right) \frac{d}{dt} \delta A = N_{a,p}$$

在正壓情形 (Auto-barotropic) 下， $N_{a,p}$ 為 0，於是最後一式變為

$$\left(\frac{\delta c_a}{\delta A} \right) \frac{d}{dt} \left[\frac{\delta A}{\delta A} \right] = - \frac{1}{\delta A} \frac{d}{dt} [\delta A]$$

根據定義， $\frac{\delta c_a}{\delta A}$ 為絕對旋率，以 Q_A 代之。 $\frac{1}{\delta A} \frac{d}{dt} [\delta A]$ 為輻散，如以數學符號表示則為 $\text{div} V$ ， V 為速度。故又可書為

$$\frac{d}{dt} [Q_A] = -Q_A \cdot \text{div} V$$

此式為有名之絕對旋率方程式。如應用上式於非輻散層 (平均高度在 500mb 至 600mb)，則 $\text{div} V$ 約為零，於是

$$\frac{\partial Q_A}{\partial t} + u \frac{\partial Q_A}{\partial x} + v \frac{\partial Q_A}{\partial y} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_A}{\partial t} &= - \left[u \frac{\partial Q_A}{\partial x} + v \frac{\partial Q_A}{\partial y} \right] = -V \cdot \nabla Q_A \\ &= A_Q \end{aligned}$$

最後一式即為絕對旋率平流。(Vorticity advection)。即絕對旋率梯度沿速度 V 方向二者無向量積。現以 A_Q 表之。 $\frac{\partial Q_A}{\partial t}$ 表示當地絕對旋率之時間變率。在無輻散或輻合時二者相等。

II 二次空間平均圖 (Double Space Mean Chart) 之基本原理

根據流體力學之一向量公式

$$K \times V = -\nabla \psi$$

式中 K 為垂直地面之單位向量， V 為速度之向量， ψ 為流線函數， $-\nabla \psi$ 為流線函數梯度；若將上左分列為

二，即

$$u = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial\psi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial Q_A}{\partial t} = -V \cdot \nabla Q_A = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial Q_A}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial Q_A}{\partial x} = -\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial Q_A}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial Q_A}{\partial x}\right)$$

$$= -J(\psi, Q_A) = +J(-\psi, Q_A) \dots\dots\dots ①$$

式中之 J 表 Jacobian。根據此式 $\frac{\partial Q_A}{\partial t} = J(-\psi, Q_A)$ ，吾人可知絕對旋率在流線場中而運動。

因絕對旋率根據定義為相對旋率與科氏參變數之和，故

$$Q_A = Q_R + f = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) + f$$

其中 Q_R 為相對旋率， f 為科氏參變數，而 Q_R 可以 $\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ 表示，將 u, v 之值代入，則

$$Q_A = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi + f = \nabla^2\psi + f \dots\dots\dots ②$$

∇^2 為 Laplacian 符號。

設天氣圖為一平面垂直坐標圖，如下圖所示，各點座標為 $i, j; i+1, j; i, j+1; \dots\dots\dots$ 等等，而每格之距離設為 d ，則在各點上之 ψ 分別為 $\psi_{i, j}; \psi_{i+1, j}; \psi_{i, j+1}; \dots\dots\dots$ 等等。

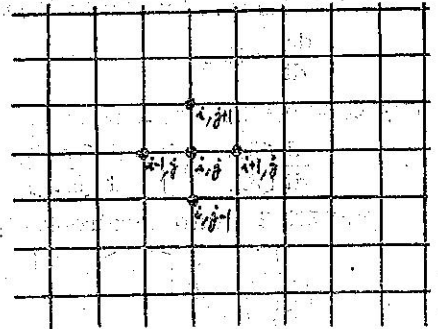


圖 一

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{1}{d} (\psi_{i, j} - \psi_{i-1, j})$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{1}{d} \left\{ \frac{1}{d} (\psi_{i+1, j} - \psi_{i, j}) - \frac{1}{d} (\psi_{i, j} - \psi_{i-1, j}) \right\}$$

$$= \frac{1}{d^2} \{ \psi_{i+1, j} + \psi_{i-1, j} - 2\psi_{i, j} \}$$

同理

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = \frac{1}{d^2} \{ \psi_{i, j+1} + \psi_{i, j-1} - 2\psi_{i, j} \}$$

所以

$$+\nabla^2\psi = \frac{1}{d^2} \{ (\psi_{i+1, j} + \psi_{i-1, j} + \psi_{i, j+1} + \psi_{i, j-1}) - 4\psi_{i, j} \}$$

$$= \frac{4}{d^2} \left\{ \frac{1}{4} [\psi_{i+1, j} + \psi_{i-1, j} + \psi_{i, j+1} + \psi_{i, j-1}] - \psi_{i, j} \right\}$$

$$= \frac{4}{d^2} \{ \bar{\psi} - \psi_{i, j} \}$$

式中 $\bar{\psi}$ 為座標 i, j 周圍四點流線函數之平均值

但天氣圖並非一完全垂直座標圖故應加一圖尺之係數以改正之，令為 m 。因 $m \Delta x = \Delta a, m \Delta y = \Delta b$ ，且在 Polar stereographic projection 投射圖(通常“北半球天氣圖”多為此種投影) m 之值為 $\frac{2}{1 + \sin\varphi}$ 。若吾人取 φ 為 45° ，則 $m \approx 1$

$$\text{故 } +\Delta^2\psi = \frac{4m^2}{d^2} (\bar{\psi} - \psi_{i, j}) = -\frac{4}{d^2} (\psi_{i, j} - \bar{\psi})$$

如略去指標 i, j 故吾人可將相對旋率為 $-\frac{4}{d^2} (\psi - \bar{\psi})$ 。即

$$Q_R = -\frac{4}{d^2} (\psi - \bar{\psi}) \dots\dots\dots ③$$

應用①，②及③式，可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_A}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left[-\frac{4}{d^2} (\psi - \bar{\psi}) + f \right] = -J \left[\psi, -\frac{4}{d^2} (\psi - \bar{\psi}) + f \right] \\ &= J \left[\psi, \frac{4}{d^2} (\psi - \bar{\psi}) - f \right] \end{aligned}$$

然 f 非時間之函數，僅為緯度之函數，故 $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ ，致

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_A}{\partial t} &= -\frac{4}{d^2} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\psi - \bar{\psi}) \right] = J \left[\psi, \frac{4}{d^2} (\psi - \bar{\psi}) - f \right] \\ &= \frac{4}{d^2} \cdot J \left[\psi, \psi - \bar{\psi} - \frac{d^2}{4} f \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\partial}{\partial t} (\psi - \bar{\psi}) &= -J \left(\psi, \psi - \bar{\psi} - \frac{d^2}{4} f \right) \\ &= J \left\{ -\psi, \psi - \bar{\psi} - \frac{d^2}{4} f \right\} \dots \dots \dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

此處有一訣竅，即應用 Jacobian 時有下列變化，即

$$J(u, v) = J(u-v, v) = J(u+v, v) \dots \dots \dots \textcircled{5}$$

應用⑤式，則④式

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\psi - \bar{\psi}) &= -J \left\{ \psi - \left[\psi - \bar{\psi} - \frac{d^2}{4} f \right], \psi - \bar{\psi} - \frac{d^2}{4} f \right\} \\ &= -J \left\{ \bar{\psi} + \frac{d^2}{4} f, \psi - \bar{\psi} - \frac{d^2}{4} f \right\} \end{aligned}$$

因為此式須重覆應用，凡第一次應用之值均加指標 1 表示，並求簡單計令 $\frac{d}{4} f = m_1$ 。故上式成爲

$$\frac{\partial}{\partial t} (\psi - \bar{\psi}^1) = -J \left\{ \bar{\psi}^1 + m_1, \psi - \bar{\psi}^1 - m_1 \right\} \dots \dots \dots \textcircled{6}$$

如此式展開重新排列，則

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\psi - \bar{\psi}^1) &= - \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\psi}^1 + m_1) \frac{\partial}{\partial y} (\psi - \bar{\psi}^1 - m_1) - \frac{\partial}{\partial x} (\psi - \bar{\psi}^1 - m_1) \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\psi}^1 + m_1) \right\} \\ &= - \left\{ \frac{\partial \bar{\psi}^1}{\partial x} \frac{\partial (\psi - \bar{\psi}^1 - m_1)}{\partial y} + \frac{\partial m_1}{\partial x} \frac{\partial (\psi - \bar{\psi}^1 - m_1)}{\partial y} - \frac{\partial \bar{\psi}^1}{\partial y} \frac{\partial (\psi - \bar{\psi}^1 - m_1)}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial m_1}{\partial y} \frac{\partial (\psi - \bar{\psi}^1 - m_1)}{\partial x} \right\} \\ &= - \left\{ \left[\frac{\partial \bar{\psi}^1}{\partial x} \frac{\partial (\psi - \bar{\psi}^1)}{\partial y} - \frac{\partial \bar{\psi}^1}{\partial y} \frac{\partial (\psi - \bar{\psi}^1)}{\partial x} \right] + \frac{\partial m_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} (\psi - \bar{\psi}^1 - m_1) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial m_1}{\partial y} \frac{\partial (\psi - \bar{\psi}^1 - m_1)}{\partial x} - \frac{\partial \bar{\psi}^1}{\partial x} \frac{\partial m_1}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\psi}^1}{\partial y} \frac{\partial m_1}{\partial x} \right\} \\ &= - \left\{ \left[\frac{\partial \bar{\psi}^1}{\partial x} \frac{\partial (\psi - \bar{\psi}^1)}{\partial y} - \frac{\partial \bar{\psi}^1}{\partial y} \frac{\partial (\psi - \bar{\psi}^1)}{\partial x} \right] - \frac{\partial m_1}{\partial x} \frac{\partial \bar{\psi}^1}{\partial y} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial m_1}{\partial x} \frac{\partial (\psi - \bar{\psi}^1 - m_1)}{\partial y} + \frac{\partial m_1}{\partial y} \frac{\partial \bar{\psi}^1}{\partial x} - \frac{\partial m_1}{\partial y} \frac{\partial (\psi - m_1)}{\partial x} - \frac{\partial m_1}{\partial y} \frac{\partial \bar{\psi}^1}{\partial x} \right\} \end{aligned}$$

因吾人係取 X 軸向東，y 軸向北，故 $\frac{\partial m_1}{\partial x}$ 應爲零，上式簡化，最後

$$\frac{\partial (\psi - \bar{\psi}^1)}{\partial t} = - \left\{ J [\bar{\psi}^1, \psi - \bar{\psi}^1] - \frac{\partial m_1}{\partial y} \left(\frac{\partial (\psi - m_1)}{\partial x} \right) \right\}$$

若吾人取 $d = 5.6^\circ$ (在北緯 45° 度處) $\frac{\partial m_1}{\partial y} = \frac{2\omega \cos \theta}{R} \cdot \frac{d^2}{4}$ 此數甚小，略而不計則得

$$\frac{\partial (\psi - \bar{\psi}^1)}{\partial t} = -J [\bar{\psi}^1, \psi - \bar{\psi}^1] \dots \dots \dots \textcircled{7}$$

比較⑥式與⑦式，其不同處僅為略去 m 。前者為絕對旋率在 $\bar{v}^1 + m_1$ 流場中之平流，而後者則為相對旋率在 \bar{v}^1 流場中平流。在實際運用上二者差異極微。而此二式亦即謂一次空間平均圖 (Single Space-mean Chart) 所根基之基本公式。

因式中 \bar{v}^1 對時間言，變化雖小近於常數，但祇限於 24 小時內。為求應用於更長時間，使預報有效時間加長一倍或兩倍，可重覆平均一次，利用所謂二次空間平均圖來從事較長期之預報。

此處吾人須假定當地絕對旋率對時間之變率之平均值等於當地平均絕對旋率對時間之變率即

$$\frac{\partial \bar{Q}_A}{\partial t} = \frac{\partial \bar{O}_A}{\partial t}$$

亦即平均 Jacobian 等於 Jacobian 之平均值。故

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{Q}_A}{\partial t} &= \frac{\partial \bar{Q}_A}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \bar{v}^1 + f] = \frac{\partial}{\partial t} \left[-\frac{4}{d_2^2} (\bar{v}^1 - \bar{v}^{1^2}) + f \right] \\ &= -\frac{4}{d_2^2} \frac{\partial}{\partial t} [\bar{v}^1 - \bar{v}^{1^2}] \end{aligned}$$

式中 \bar{v}^{1^2} 為經二次空間平均後之流線函數值。其平均方法與一次空間平均圖上之 \bar{v}^1 情形相似，惟所採之距離 d 不同，較前者大一倍，而以 d_2 表示，其 d_2 之值為 11.2° (在北緯 45° 處之值)。

吾人利用⑥式之方法可獲得⑥式相似之結果，則

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{v}^1 - \bar{v}^{1^2}) &= -J \left[\bar{v}^1, \bar{v}^1 - \bar{v}^{1^2} - \frac{d_2^2 f}{4} \right] \\ &= -J \left[\bar{v}^1 + \frac{d_2^2}{4} f, \bar{v}^1 - \bar{v}^{1^2} - \frac{d_2^2}{4} f \right] \end{aligned}$$

今令 $\frac{d_2^2}{4} f = m_2$ ，則

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{v}^1 - \bar{v}^{1^2}) = -J \left[(\bar{v}^1 + m_2), (\bar{v}^1 - \bar{v}^{1^2} - m_2) \right] \dots \dots \dots \textcircled{8}$$

此式中之 m_2 值僅為緯度之函數，但較 m_1 為大。 $\bar{v}^1 + m_2$ 為二次空間平均圖上氣流線加以緯度變化後之值，對時間之變化較 \bar{v}^1 更為緩慢。

由最後一式，研究其物理意義，吾人得知在 $\bar{v}^1 + m_2$ 流線場中， \bar{v}^1 場中之旋率之變率可由其流線場之平流而獲得。在二次空間平均圖上之流場多用鉛筆表示，而在 \bar{v}^1 場中絕對旋率線 $\bar{v}^1 - \bar{v}^{1^2} - m_2$ 則多用紅色表示，以示分別。

一次空間平均圖已可認為長波公式之極佳近似值。故二次空間平均圖則表示長波圖形之運動及變化。實際此公式即 Rossby 之長波公式之另一面，因

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\bar{v}^1 - \bar{v}^{1^2})}{\partial t} &= -J \left\{ \bar{v}^1 + m_2, \bar{v}^1 - \bar{v}^{1^2} - m_2 \right\} \\ &= J \left\{ -(\bar{v}^1 + m_2), \bar{v}^1 - \bar{v}^{1^2} - m_2 \right\} \end{aligned}$$

式中 $(\bar{v}^1 + m_2)$ ，實為相當於等高線之等值線，而其梯度，即 $-\nabla (\bar{v}^1 + m_2)$ ，則為速度，假定為 \vec{C} 。因為

$$\vec{K} \times \vec{C} = -\nabla (\bar{v}^1 + m_2) = -\nabla (\bar{v}^1) - \nabla m_2 \dots \dots \dots \textcircled{9}$$

而式中右方第一項應為

$$-\nabla (\bar{v}^1) = \vec{K} \times \vec{V} = \vec{K} \times [u\vec{i} + v\vec{j}] = +u\vec{j} - v\vec{i}$$

第二項則為

$$-\nabla m_2 = -\left(\frac{\partial m_2}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial m_2}{\partial y} \vec{j} \right)$$

$$= -\frac{d^2}{4} \frac{\partial (2\sin\theta)}{\partial x} \vec{i} - \frac{d^2}{4} \frac{\partial (2\sin\theta)}{\partial y} \vec{j}$$

$$= -\frac{d^2}{4} \frac{2\omega\cos\theta}{R} \vec{j} = -\frac{d^2}{4} B \vec{j} - O \vec{j}$$

而式中左方

$$\vec{K} \times \vec{C} = \vec{K} \times [C_x \vec{i} + C_y \vec{j}] = C_x \vec{j} - C_y \vec{i}$$

所以，將上列諸式再代入⑨式後，則得

$$C_x = U - \frac{d^2}{4} B, \quad C_y = V \dots\dots\dots \textcircled{10}$$

若 U 視作沿緯度線之平均西風流速 (Mean Zonal Velocity) 並令 $d = \frac{L}{\pi}$ ，則

$$C_y = U - \frac{BL^2}{4\pi^2}$$

此實即 Rossby 之長波公式。C_x 表長波向東方向之波速。亦即在正壓 (Barotropic Condition) 情形下，波長為 L 時槽及脊之向東之流動速率。

因 d 之最大值為 90°，減半則為 45°，逐次減半為 22.5°，11.2°，及 5.6° 等等。在作一次空間平均圖係選 d = 5.6°，可使小系統或小範圍之旋率在圖上消除，而二次平均則用 11.2° 可使小系統或小範圍之旋率，諸如移動性的風暴系統，可在該圖消除無遺，而可用以作較長期天氣之根據。

III 繪製方法與注意之點

A) 方法：

① 用二透明膠片分別作二不同顏色之 500mb 一次空間平均圖二份 (方法見一卷一期圖解預報法)。

② 然後採以北緯 45 度及 d₂ = 11.2，東徑 160 度 (需視地點而變更，如向南北移動則須加如尺度一類之校正) 為原點，仿一次空間平均圖之方法製成 \bar{z}^1 圖因為 $Z = C\psi$ ，式中 ψ 為流數函數，c 為常數，z 為等高線，故 \bar{z}^1 實為 Z^1 ，即等壓面之二次空間平均圖上之等高線。

③ 然後準備 -m₂ 場之特別透明膠片 (保留以後仍可應用)。如用極投影地圖 (通常北半球天氣圖多用此類投影)，按下列一定緯度繪成同心圓之等值線。

- 70.5°N = 1200 (呎)
- 62.0°N = 1000 (呎)
- 54.5°N = 800 (呎)
- 46.0°N = 600 (呎)
- 37.5°N = 400 (呎)
- 24.5°N = 200 (呎)

④ 然後在透明膠片上繪 $\bar{z}^1 + m_2$ 線。

⑤ 自一次空間平均透明膠片圖上 (Z^1)，減去 $\bar{z}^1 + m_2$ 。用紅色筆將其繪於空白透明膠片上，此即 $Z^1 - \bar{z}^1 - m_2$ ，為絕對旋率線。

⑥ 然後以 $\bar{z}^1 + m_2$ 梯度之 100% 之速率垂直於 $Z^1 - \bar{z}^1 - m_2$ 絕對旋率之分速來移動它。即所謂旋率平流。

(B) 注意之點

① 相對旋率平流 (或絕對旋率平流) 應用之計算方法如下：設 Z 流場中垂直旋率線 Z-Z 之分速可以 S_n 為間隔用地轉風圖表求得。如需向東速度則可以 S₀ 為間隔用地轉風圖表求得，用此種方法求垂直分速及向東分速比較方便且迅速。

因 S_n cos φ = Δn，而二等高線間之流速 v 與 $\frac{\Delta Z}{\Delta n}$ 成正比，垂直於 Z-Z 之垂直分速為 v cos φ，即

$$v \propto \frac{\Delta \bar{z}}{\Delta n}, \quad v \cos \rho \propto \frac{\Delta \bar{z}}{\Delta n} \cos \rho$$

$$\text{故 } v \cos \rho \propto \frac{\Delta \bar{z}}{S_n}$$

意即以 S_n 為間隔所產生之風速相當也。

②在繪製 $\bar{z}^2 + m_2$ 圖時，因求 $-\nabla(\bar{z}^2 + m_2) = U - \frac{\beta L^2}{4\pi}$ 故實際為將來量度平流之流速之用，應自 \bar{z}^2 圖減去 m_2 圖之值（彼此符號相反）而並非相加。

③ $\bar{z}^2 - \bar{z}^2 - m_2$ 場為絕對旋率（甚少有關閉中心，且通常多平行於緯度線，較高值在北方，較低值則在南方。因 m_2 北方大而南方小故也。

④在梯度甚弱時， \bar{z}^2 圖之等高值宜以每100呎繪一線。意即 $\bar{z}^2 + m_2$ 亦應每100呎繪一線。

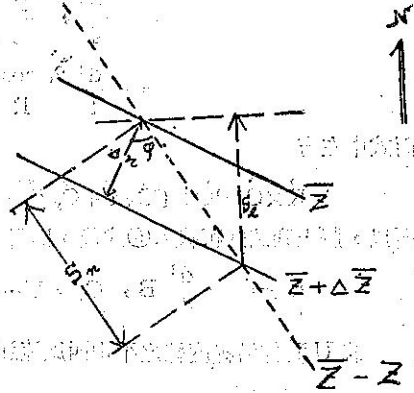


圖 11-2

IV 旋率平流理論之應用

A. 500mb 預測圖之繪製：

利用一次空間平均圖，消除短波，而成爲長波圖，對於24小時內之導流尙有成效，可根據作24小時500mb預測圖。（見本刊一卷一期徐君之圖解預報之介紹）。

B. 地面氣壓系統之導流作用：

二次空間平均圖用於決定旋率平流區域，而此等旋率平流區域與地面系統相一致。在二次空間平均圖上，該區域中諸 $\bar{z}^2 + m_2$ 線與絕對旋率相交，向下流如係由低的絕對旋率而指向高的絕對旋率，則該區域大範圍地發生地面氣壓上升現象。反之則大範圍地區域內發生地面氣壓下降。此等流線在24小時至48小時內可謂變化甚小，故對於導流一些氣象量甚有裨益。諸如高度變化中心及地面高低氣壓中心。因此一圖之等高線之梯度實爲 Rossby 之長波公式，表示在某一固定波長下（約爲45°N處，50個經度之寬度），長波之槽或脊之運動情形。因在45°N處50個經度之寬度與經常每日高空500mb圖上脊及槽之平均波長相近。故吾人可量度 $\bar{z}^2 + m_2$ 間之梯度而可獲每日槽及脊之運動情形。尤其是當該等高線之振幅較小而風速甚強時特別可靠。

C. 地面氣旋之發展：

芝加哥大學 Peterssen 博士爲針對氣旋發展特別寫出一公式

$$Q_0 D_0 = \frac{R}{f} \nabla^2 \left\{ \log \left(\frac{p}{p_0} \right) \times \left[\bar{A}_T + \omega (\Gamma_a - P) + \frac{1}{C_p} \frac{dw}{dt} \right] \right\} - A_a \dots \dots \dots \textcircled{1}$$

其中 Q_0 爲 1000mb 上某點之絕對旋率， D_0 爲該層之輻散代數值， A_T 爲溫度平流， ω 爲 $\frac{dp}{dt}$ ， $P_a = \frac{1}{\rho g} \gamma_a$

$\Gamma = \frac{\partial T}{\partial p}$ ， $\frac{dw}{dt}$ 爲單位時間內所予單位質量之熱能，而上之橫劃代表對 $\log p$ 間隔中之平均值。最後一項爲旋率平流。

在氣旋處 Q_0 爲正值，氣旋性絕對旋率如有發展必須①式右方代數和爲負，亦即某種物理量的二次偏微分 (Laplacian) 與旋率平流之差異或代數和須爲負值但前者非常複雜，且難一一計算清楚，而且與非輻散層之實際高度有關。

由上式可知，若風由高旋率處吹向低旋率處，則 A_a 爲正。所以非輻散層之下旋率平流如仍爲正，當爲海平面氣旋發展之有利條件。正旋率平流在對流層中部或上部槽線前方甚爲常見，但有時氣旋未必發展或因熱力部份配合不佳所致。然就另一方面言，經驗昭示吾人，並經檢查多數氣旋情形之結果，獲知某區域低層氣流輻合之基礎奠定實由於在對流層中部或上部當時該處有相當可觀的正旋率平流重疊於低層界面之上，換言之，當低層氣旋發展時，高空槽線前方必爲正旋率平流。所以旋率平流在諸項中當可視爲對氣旋發展最有供獻之項目。但在此必須注意者即旋率平流上下層均有正值則有利於發展，但下層必須爲輻合，上層爲輻散，而非輻散層之平均高

度在500mb 至 600mb 間，否則，不利於較深之發展。

在何條件下，強大之正旋率平流利於產生，自下列各式可見一斑。

假若吾人就 300mb 等壓面圖而論令 $Q_A = Q_R + f$ ，而 $Q_R = VK_S - \frac{\partial v}{\partial n}$ ，其中 K_S 為流線曲率， $\frac{\partial v}{\partial n}$ 為風變，故 $Q_A = VK_S - \frac{\partial v}{\partial n} + f$

$$\therefore A_Q = -V \cdot \nabla Q_A = -V \cdot \nabla \left[VK_S - \frac{\partial v}{\partial n} + f \right]$$

若取 X 與流線方向一致，則

$$A_Q = -V \cdot \nabla Q_A = -V \left[\frac{\partial v}{\partial x} K_S + V \frac{\partial K_S}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial n} \right) - \frac{\partial f}{\partial x} \right]$$

右式第一項 $\frac{\partial v}{\partial x}$ 實為垂直曲率 K_N 與速率 V 之積，第三項因沿流線方向，故趨近於零，最後一項與其他各量相較，渺小乃致可以略去不計故最後

$$A_Q = -V \left(V K_N \cdot K_S + V \frac{\partial K_S}{\partial x} \right) \\ = -V^2 \left(\frac{\partial K_S}{\partial x} + K_S K_N \right) \dots \dots \dots \textcircled{2}$$

其中 K_S 為垂直曲率，用以表示流線會集或分散者，其值為正時表示輻合，為負時表示輻散。 $\frac{\partial K_S}{\partial x}$ 在槽前為負值，在槽後為正值。改由 $\textcircled{2}$ 式可以得知最大旋率平流之條件為，

- ① 槽前等高線或流線曲率迅速低降時。 $\left(\frac{\partial K_S}{\partial x} < 0 \right)$
- ② 槽前等高線或流線迅速分散時 (Diverge) $(K_N < 0)$
- ③ 風速強大時。 $(V \gg 0)$

由此可知地面氣旋之發展與上列諸因素休戚相關。故在槽前，氣流線分散處 (Delta area) 及噴射氣流附近，地面上常有氣旋生成或加深。故不論在性質或數值方面對氣旋發展之預報有幫助。尤其是當高空正旋率平流中心趨近海平面氣壓系統而後抵達地面低壓中心時，復配合溫度平流及其他穩定度等因素則旋率平流中心變大，而地面氣旋將迅速發展。

上式為理論方面之推演，最後經美國氣象局芝加哥預報中心之實驗，證明 97 次中有 79 次與預測相符，故此方法對於研究氣旋之發展之預報確有價值。若再將溫度平流，穩定度，熱能加入計算，則預測效率必更高也。

D. 旋率平流與降水之關係：

高旋率平流亦為指示降水區域之一良好工具，根據靜力公式可得以下之證明。因壓力變差公式

$$\frac{\partial p_0}{\partial t} = -g \int_0^\infty \rho \operatorname{div}_2 V \, dz$$

根據本文第一節導言中絕對旋率公式 $\frac{1}{Q_A} \frac{dQ_A}{dt} = -\operatorname{div}_2 V$ 公式，則

$$\frac{\partial p_0}{\partial t} = +g \int_0^\infty \rho \frac{1}{Q_A} \frac{dQ_A}{dt} \, dz \\ = +g \int_0^\infty \frac{\rho}{Q_A} \left[\frac{\partial Q_A}{\partial t} + V \cdot \nabla Q_A \right] \, dz$$

因此一般情形， V 之速度 (風速) 常大於旋率線之流速，故

$$\frac{\partial Q_A}{\partial t} \gg V \cdot \nabla Q_A$$

於是

$$\frac{\partial p_0}{\partial t} = \pm g \int_0^\infty \frac{\rho}{Q_A} (V \cdot \nabla Q_A) \, dz$$

$$= -g \int_0^{\infty} \frac{\rho}{Q_0} A_Q dz \quad (\because A_Q = -V \cdot \nabla Q_A)$$

吾人深知降水多伴以低層氣壓下降，或氣流上升，水平輻合。而晴朗天氣則常伴以低層氣壓上升或氣流下降，水平輻散。但就垂直分佈言，氣壓之下降實為上層輻散重疊於低層輻合之上而勝過之結果。故吾人可應用非輻散層上之垂直速度 W_h 及代表上層之 300mb 等壓面圖上之 A_Q 來表示，於是

$$W_h \text{ 之符號} = A_Q \text{ 之符號} |_{300mb}$$

其中 W_h 為垂直速度。向上為正，向下為負。故由上式可知降水多雲之區域應盛行於旋率向下流降低處。而晴好天氣之區域應盛行於旋率向下流增加處。換言之，即前者為氣流自正極大旋率中心向外流之區域，後者為氣流自負極大旋率中外流心或流向正旋率中心之區域。同時降水之強度亦與 A_Q 有關，因其與速度平方成正比也，故在噴射氣流北方，常為雨量豐沛區域。

V 總 結

旋率平流以圖解的方式來應用於天氣圖，這種數值預報的方法係 Fjørtoft 所倡導，其所根據之假定雖為正壓條件，但在實際應用尚相去不遠，成績頗佳。尤其是對一日到三日之預報頗有幫助。譬如 Fujiwhara 二颱風或二氣旋相對旋轉之理論可用此圖加以解釋，因經二次平均後，該區域變成以該二颱風重心為中心之封閉之「低」。乃致導引此二颱風相對旋轉，對於其來去之路徑亦可用圖予以推測。此類圖之繪製頗為機械且不主觀。實有試用價值，東京美軍氣象中心長期預報股採用為必需之一種天氣圖。臺灣亦可試用以研究其在低緯度處究竟效果如何。臺灣在 25 度到 21 度間，一般多為正壓情形。若在圖之尺度取得合理之係數後當可有合理之結果。

至於氣旋發展，因現尚在初步研究階段中，且需有更多對於熱能方面之資料，一併加入詳細計算，則結果當更完滿，惟關於此方面尚須繼續研究至於降水方面上述方面，只可作性質上的討論，因其強度之預報所牽連之因素太多，諸如地形影響，低層之作用。故對強度之預報，只能作相對性的預報但未嘗不無裨益，但有一點必須注意者即沿流線方向之旋率梯度小於 $5 \times 10^{-5} \text{ sec}^{-1} (10 \text{ lat})^{-1}$ 者不宜用以作為降水之指示，大於此數方為合適。

總之，旋率平流對於預報確有幫助，但繪製此種天氣圖時不能缺乏資料，尤其高空資料，如果分析時發生問題，則以後所發生誤差當不堪想像。此實為應用此圖作預報時，必須充分注意記錄及分析者，如此而後方能達到理想。

參考文獻：

- ① Martin 少校之演講。
- ② S. petterssen: A General Survey of Factors Influencing Development at Sea Level
- ③ S. petterssen and Gordon E. Dunn and L. L. Means
Report of an Experiment in Forecasting of Cyclone Development
(上列二文均刊於 Journal of Meteorology, A. M. S. Vol. 12, No. 1, Feb. 1955)
- ④ Herbert Riehl: Forecasting in Middle Latitude, Meteorological Monographs Vol. I. No5
A. M. S.
- ⑤ Homlbeo: Dynamic Meteorology

轉接第 6 頁 (關於那威學說與法國學說在天氣預報應用上的觀感)

氣壓差的值比較氣壓值可靠：(三) 通報時只須加一項也很簡便，現在所用的是三小時的氣壓差就是氣壓趨勢；(四) 變化心核運動有規則速度有常定，極便應用；(五) 無論是鋒面圖或是雲系圖，變化心核都可以用作輔助。

按以上諸觀點，我們若果要在這兩派學說，對天氣預報應用上做一個選擇，依筆者個人意見，是要選用法國派學說，這也是自己已往研究天氣預報時所主張的，這也並不是先入為主的意見，實在由自己所作分析，覺得法國學說是輕而易舉簡而易行，而在中國的立場，一方面可以節省財力，一方面可以節省人力，而所得的天氣預報的效果，也可以有很可靠的百分率，似亦相當適合。以上所述是個人的觀感，尚希國內天氣預報專家指教。