

乾絕熱公式轉換位溫內插法和通用克利金法 估計台灣地表溫度之比較

李天浩¹、劉浙仁²、林佑蓉²、鄭安孺³、吳明進⁴、陳雲蘭⁵、李清騰⁵、李育祺⁵、蔡孝忠⁵

1. 台大土木系副教授與水工所副研究員 2. 台大水工所研究助理 3. 台大土木所博士現任職多采科技公司
4. 台大大氣所教授 5. 中央氣象局

摘要

使用不同高度氣象站的溫度觀測，在三維空間中內插估計全台灣網格點的地表溫度分佈，本研究比較兩類空間內插方法，第一類方法是利用乾絕熱遞減率公式，將不同高度的測站溫度轉換為位溫，再採用距離倒數權重法、Cressman 客觀分析法、Barnes 客觀分析法或是普通克利金法，在等壓面的二維空間內插估計各網格點位溫，再利用乾絕熱遞減率公式將位溫轉換為網格點地表溫度。第二類方法，是使用可以將地表溫度隨高度、緯度等空間變化趨勢納入不偏估條件，直接以所有三維空間測站地表溫度，內插估計任意高度網格地表溫度的通用克利金法。

研究發現地表溫度隨高度變化的溫度遞減率，和大氣乾絕熱遞減率有明顯差異；利用乾絕熱遞減率轉換地表溫度和位溫時，若估計點位高程與影響範圍內測站高程差異愈大，則地表溫度估計值與觀測值的偏差愈大。第一類方法的四種等壓面空間內插方法的差異性，不如溫度遞減率偏估的影響大。通用克利金法不使用乾絕熱公式，而是要求權重係數，不論地表溫度隨高度遞減率、隨緯度變化斜率、以及截距數值為何，都能達到不偏估的內插目標。利用兩類方法分別內插估計測站地表溫度，證實通用克利金法的地表溫度估計值和測站觀測值較為契合。

關鍵字：絕熱遞減率、地表溫度、通用克利金法

一、理論及方法介紹

1.1 溫度遞減率和壓力高度關係

估計地表溫度常用方式，是將氣象站地表溫度觀測值，利用乾絕熱遞減率假設轉換為位溫；其次，在 1 大氣等壓面上內插估計網格點的位溫；最後，再利用乾絕熱假設將網格點的位溫轉換為網格點高程的地表溫度。圖 1 為 2009 年 4 月 9 日 8 時全台灣測站地表溫度、板橋探空溫度、乾絕熱溫度等三種溫度隨高度變化的關係圖，顯示三者的溫度遞減率差異很大。地表溫度隨高度遞減率，約為 $4.2^\circ\text{C}/\text{km}$ ，遠低於乾絕熱遞減率的 $9.8^\circ\text{C}/\text{km}$ 和標準大氣的 $7^\circ\text{C}/\text{km}$ 。

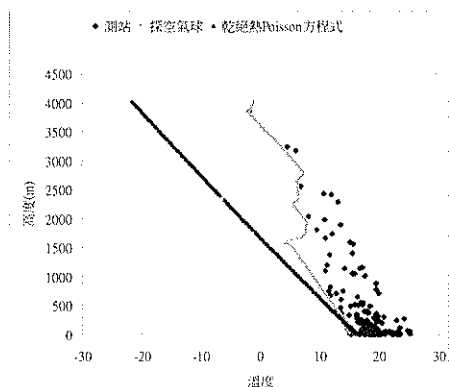


圖 1 2009 年 4 月 9 日 8 時的地表溫度、板橋探空溫度、乾絕熱溫度等三種溫度隨高度變化的關係圖

全台測站的壓力觀測值隨高度變化關係，和板橋探空資料，以及基於大氣靜水壓力假設導出的壓力—高度關係式，三者均非常吻合。

綜合以上兩項資料說明可知，壓力和高度的轉換關係良好，但地表溫度和高度的關係，或地表溫度和壓力的關係，與自由空氣的乾絕熱遞減率差異很大。從物理角度可以理解，因為地表熱含量遠高於空氣，在輻射、對流、蒸發影響下的地表溫度隨高度遞減率，和自由大氣的溫度遞減率不同。

1.2 平面空間內插方法

四種內插位溫 θ 的方法，包括：距離倒數權重法、Cressman (1959) 客觀分析法、Barnes (1964, 1973) 客觀分析法以及普通克利金法。方法簡介如下：

(一) 距離平方倒數權重法

利用距離平方倒數權重法內插估計在 (x_0, y_0) 位溫 θ_0 的方式，是以 (x_0, y_0) 為中心，使用所有在影響半徑 R 範圍內的測站位溫值 θ_k ， $k = 1, \dots, n$ ， k 測站 (x_k, y_k) 到 (x_0, y_0) 的距離為 $d_{k,0}$ ，權重估計方程式如下：

$$\hat{\theta}_0 = \sum_{k=1}^n w_{k,0} \cdot \theta_k \quad (1)$$

$$w_{k,0} = \frac{1/d_{k,0}^2}{\sum_{i=1}^n (1/d_{i,0}^2)} \quad (2)$$

(二) Cressman 客觀分析法

Cressman 客觀分析法為一種迭代修正法，假設已

知背景場或第 $m-1$ 次迭代，所有 (x_{ij}, y_{ij}) 位置的二維網格點估計值 $\hat{\theta}_{ij}^{m-1}$ ，迭代計算的算式如下：

1. 以包含觀測站的四個周圍網格點值，二次線性內插計算測站 k 位置的估計值 $\hat{\theta}_k^{m-1}$ ，再計算觀測值 θ_k 和 $\hat{\theta}_k^{m-1}$ 的差值 $D_k^{m-1} = \theta_k - \hat{\theta}_k^{m-1}$ 。
2. 計算第 m 次網格點估計修正值，其權重估計式為：

$$C_{ij}^m = \frac{\sum_{k=1}^n w_{k,ij} D_k^{m-1}}{\sum_{k=1}^n w_{k,ij}} \quad (3)$$

$$w_{k,ij} = \begin{cases} \frac{R^2 - d_{k,ij}^2}{R^2 + d_{k,ij}^2} & \text{if } d_{k,ij} < R \\ 0 & \text{if } d_{k,ij} \geq R \end{cases} \quad (4)$$

將第 $m-1$ 次網格點修正值加入第 $m-1$ 次迭代值，更新網格點修正值：

$$\hat{\theta}_{ij}^m = \hat{\theta}_{ij}^{m-1} + C_{ij}^m \quad (5)$$

重複步驟 1、2，直到所有測站的差異值 D_k^m 都小於容許誤差 ε 為止。

(三) Barnes 客觀分析法

Barnes 客觀分析法的算式與 Cressman 的逐步修正法相同，唯一的不同處，是 Barnes 法的權重係數函數為高斯(Gauss)函數：

$$w_{k,ij} = e^{-d_{k,ij}^2/R^2} \quad (6)$$

在 Cressman 法和 Barnes 客觀分析法中，範圍 R 的意義又相當於低通濾波參數(low-pass filtering parameter)。

(四) 普通克利金法

普通克利金法(ordinary Kriging)是以線性權重組合觀測值的方式，估計 (x_0, y_0) 位置的位溫：

$$\hat{\theta}_0 = \sum_{k=1}^n \lambda_k \theta_k \quad (7)$$

權重係數 λ_k 是根據最小估計誤差變異數條件，並以 Lagrange multiplier 結合不偏估條件所導出。在變數具有空間二階定常性假設下，不偏估條件為：

$$E[\hat{\theta}_0] = \sum_{k=1}^n \lambda_k E[\theta_k] \Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \quad (8)$$

普通克利金法的權重係數 λ_k 和 Lagrange multiplier ν 可由以下矩陣式計算得到：

$$\begin{pmatrix} \gamma(d_{1,1}) & \cdots & \gamma(d_{1,n}) & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \gamma(d_{n,1}) & \cdots & \gamma(d_{n,n}) & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(d_{0,1}) \\ \vdots \\ \gamma(d_{0,n}) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

其中， $\gamma(d_{i,j})$ 為半變異圖，是由測站位溫資料所導出，其定義如下：

$$\gamma(d_{i,j}) = E[(\theta_i - \theta_j)^2] / 2 = \sigma^2 - \text{cov}(d_{i,j}) \quad (10)$$

將(10)式求出的權重係數 λ_k ，代入(7)式，即可求得網格點的內插估計值。

(五) 本研究導出之通用克利金法

利用 2009 年 4 月 9 日 8 時全台灣測站地表溫度，作線性迴歸並檢定，得知地表溫度隨緯度和海拔高度變化的趨勢顯著，去除此二趨勢後的溫度殘差值具有二階統計定常性。因此地表溫度的趨勢模型為：

$$E[T(x, y, h)] = \beta_0 + \beta_y y + \beta_h h \quad (11)$$

其中， x 、 y 、 h 分別為經度、緯度和海拔高度； β_0 為 $(y, h) = (0, 0)$ 時之平均溫度， β_h 為地表溫度 T 隨海拔高度變化的遞減率， β_y 為地表溫度隨緯度變化的遞減率。在此趨勢條件下，利用 Kitanidis (1993) 通用克利金法概念導出的三個不偏估條件分別為：

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \quad (12a)$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i = y_0 \quad (12b)$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i h_i = h_0 \quad (12c)$$

台灣地形崎嶇，短距離內因為海拔高差，地表溫度的趨勢差異可能遠大於地表溫度殘差值的變異數，本研究認知 Kitanidis (1993) 基於內在假設(intrinsic hypothesis)¹ 的通用克利金法不能適用，因此利用迭代法求解去除趨勢的協變異圖，配合使用(12)式不偏估條件，建立特殊設計的通用克利金法，其權重係數可由以下矩陣方程式計算：

$$\begin{pmatrix} \text{cov}(d_{1,1}) & \cdots & \text{cov}(d_{1,n}) & 1 & h_1 & y_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{cov}(d_{n,1}) & \cdots & \text{cov}(d_{n,n}) & 1 & h_n & y_n \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & \cdots & h_n & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & \cdots & y_n & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{cov}(d_{1,0}) \\ \vdots \\ \text{cov}(d_{n,0}) \\ 1 \\ h_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

求取以上矩陣方程式中協變異函數的方法，是利用以下包含趨勢的半變異圖與協變異圖關係式，迭代 β_h 與 β_y 數值，使協變異圖最符合二階定常性假設，迭代結果取得(15)式的協變異圖參數，包括變異數 σ^2 、積分長度 L 和金塊效應 NgL 等；通用克利金法不需要使用迭代過程獲得的 β_h 、 β_y 最佳估計數值。

$$\gamma(d_{i,j}) = \sigma^2 - \text{cov}(d_{i,j}) + \frac{\beta_h^2}{2} (h_i - h_j)^2 + \frac{\beta_y^2}{2} (y_i - y_j)^2 \quad (14)$$

若假設相同水平面的氣溫的空間協變異圖為包含金塊效應， NgL ，的指數型協變異圖，則上式改寫為：

$$\gamma(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = NgL + (\sigma^2 - NgL) \left[1 - \exp(-d_{ij}/L) \right] + \frac{\beta_y^2}{2} (y_i - y_j)^2 + \frac{\beta_h^2}{2} (h_i - h_j)^2 \quad (15)$$

求出上式中的 β_h 、 β_y 、 NgL 、 σ^2 和積分距離 L 等最佳化參數後，使用協變異圖計算(13)式的係數，再以

¹ 即近距離內趨勢差異值不大的假設， $E[T_i - T_j] \approx 0$ 。在此假設下，由於近距離半變異圖中的趨勢函數不大，變異數的數值主控；距離較遠，趨勢差異值較大的觀測值，可以透過半變異圖隨距離增加快速遞增，降低其權重係數的方式，Kitanidis (1985) 的通用克利金法乃可以不需要去除半變異圖中的趨勢函數。

矩陣方程式求出權重係數 λ_i 值，即可估計網格點的地表溫度值 \hat{T}_0 。

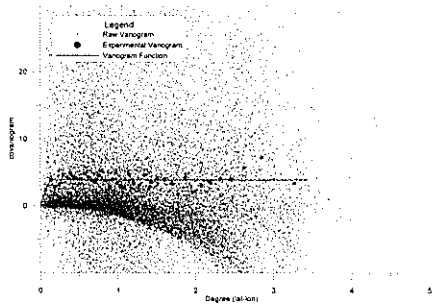


圖 2 利用 2009 年 4 月 9 日 8 時全台灣測站地表溫度迭代去除趨勢求得的二階定常性半變異圖，最佳化參數值 $\beta_h = -4.18^\circ\text{C}/\text{km}$ ， $\beta_y = -1.73^\circ\text{C}/\text{deg}$ ， $L = 0.058 \text{ deg}$ ， $\sigma^2 = 3.71(\text{C})^2$

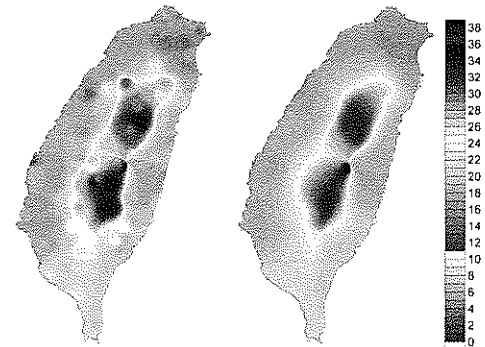
二、實際案例應用

(一)資料來源

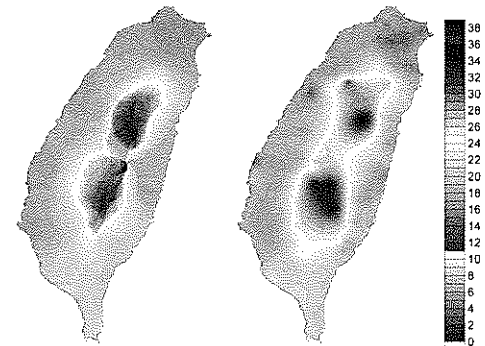
本研究使用中央氣象局 2009 年 4 月 9 日 8:00 時全台灣氣象站的地表溫度觀測資料；台灣地形格網的水平解析度 1km，垂直解析度 100m。

(二)位溫場內插結果比較

使用乾絕熱遞減率轉換地表溫度與位溫架構下，本研究四種位溫內插法的成果如圖 3。其中，Cressman 法和 Barnes 法的影響半徑 R 值都為 0.29 度，且都只做一次權重估計，沒有迭代到收斂²。圖 3 顯示使用乾絕熱遞減率將地表溫度轉換為位溫，台灣地形愈高處位溫愈高。此問題是來自乾絕熱溫度遞減率和地表溫度遞減率相當不同。此外，Cressman 法和 Barnes 法估計的位溫圖中，在非觀測位置出現異常高溫，原因是內插該網格點時，在影響範圍內僅搜尋到單一測站，故該格點的位溫估計值乃以 100% 權重該單一測站方式計算，即等於該測站的位溫；由於該測站位溫偏高，故該格點的之位溫估計值同樣偏高。



(a)距離平方倒數權重法 (b)Cressman 分析法



(C)Barnes 分析法 (d)普通克利金法

圖 3 利用乾絕熱遞減率將測站地表溫度，再以四種客觀分析法內插網格點位溫場的成果

(三)地表溫度場內插成果比較

利用內插估計的網格點位溫值，再利用乾絕熱遞減率轉換推估網格點地表溫度，以 Cressman 分析法內插法推估的地表溫度為例，將結果繪圖表示如下：

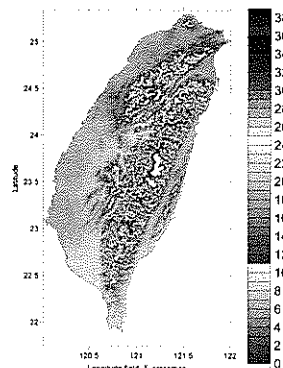


圖 4 利用乾絕熱遞減率溫度轉換，與 Cressman 法估計的地表溫度圖

由於第一類型的四種位溫內插方法皆使用乾絕熱遞減率作為溫度轉換公式，四種地表溫度分佈大致相同。將網格點地表溫度估計值和測站地表溫度對高度繪圖如下：

² Cressman 法和 Barnes 法若影響半徑內只有單站或少數站，迭代未必會穩定收斂，可能出現發散的情形。

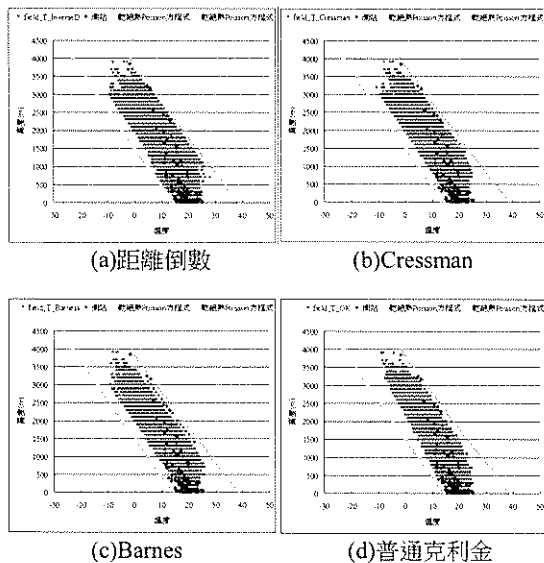


圖 5 利用乾絕熱公式計算網格點地表溫度（洋紅色點）及測站地表溫度（藍色點）對高度關係圖

圖 5 顯示，海拔高度愈高，估計點的地表溫度往往被愈低估，低海拔高度估計點的地表溫度則容易被高估。若使用乾絕熱遞減率包絡地表溫度估計值的分佈範圍，可明顯發現溫度估計值隨高度的趨勢與乾絕熱遞減率一致。由於地表溫度遞減率，遠低於乾絕熱遞減率，乃可以解釋為何出現如圖 5 中的偏估行為。若使用平地測站估計鄰近山區網格點地表溫度時，將易低估山區地表溫度；反之，若使用高山測站推估谷地網格點地表溫度時，則會出現高估情形。又因平地測站居多，故低估高山網格點的發生機會，較高估谷地格點之現象為多。

使用本研究推導的特殊通用克利金法，估計地表溫度場的結果如圖。

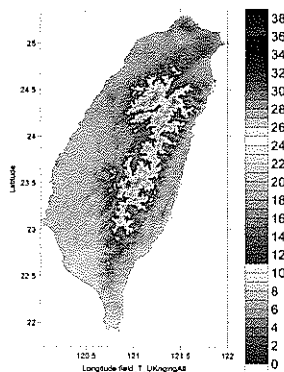


圖 6 通用克利金法估計地表溫度場結果示意圖

比較圖 4 和圖 6，發現圖 6 通用克利金法內插估計的地表溫度場較為平緩，海拔高度差異對於地表溫度的影響不如圖 4 明顯。再將通用克利金法推估網格點地表溫度的結果對海拔高度繪圖如圖 7，發現圖中地表溫度估計值對高度之分佈，與測站觀測值隨高度變化趨勢契合，不同高程的地表溫度估計值，都被包絡在測站的資料雲(data cloud)之中，沒有圖 5 落在資料雲之

外的問題，呈現內插估計應有的行為。

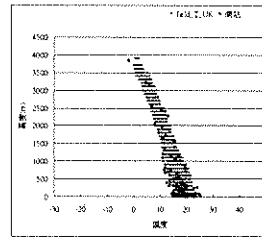


圖 7 溫度場格點及測站上之溫度對高度關係圖

(四)測站上觀測值與估計值比較

本研究採每次遮蔽一個測站，利用遮蔽站以外其餘測站之觀測值內插計算遮蔽測站位置地表溫度的方式作方法驗證。不同方法推估所有測站地表溫度與觀測值的誤差均方根如表 1。

表 1 五種方法推估地表溫度的 RMSE 值

內插方法	距離倒數	Cressman	Barnes	普通克利金法	通用克利金法
Max error	5.78	5.22	5.01	5.36	6.12
Min error	-10.84	-11.11	-10.91	-8.74	-5.68
RMSE (°C)	1.99	2.08	2.15	1.82	1.58

從表 1 不同方法推估的 RMSE 數值可以了解，第一類型四種內插方法利用乾絕熱遞減率計算的 RMSE 值差異不大，其值均約為 2°C。各個內插方式之最小誤差值均較最大誤差值偏離更多，顯示估計方法低估地表溫度的情形比高估情形為嚴重。第一類型方法中，以普通克利金法的表現較佳，其推估誤差之正負偏離範圍亦最小。

相對於第一類型的方法，通用克利金法的估計值與觀測值的趨勢特性相同，其 RMSE 的表現最佳，大約將降低了 20%，其最大及最低偏差之差距亦較小。

三、第一類型方法改進

研究發現去除海拔高度和緯度趨勢後半變異圖的積分長度(integral length)數值很小，約僅為 0.05 經緯度，表示測站地表溫度的空間相關性很低，接近迴歸後資料殘差值彼此不相關的要求。為避免乾絕熱遞減率數值過大造成估計問題，本研究另嘗試以測站地表溫度以(11)式直接線性迴歸，估計高度遞減率和緯度遞減率趨勢。利用迴歸求得係數 β_0 、 β_y 及 β_h ，每站地表溫度先扣除其緯度與高度趨勢，將殘差值內插到網格點後再加上網格點的緯度與海拔高度趨勢值，得到地表溫度推估值。圖 8 顯示以此方法配合四種位溫空間內插法估計地表溫度的數值。圖 9 為使用乾絕熱遞減率，和使用測站地表溫度線性迴歸趨勢，兩種轉換

方法結合 Cressman 客觀分析法的估計場，再計算兩者與本研究通用克利金法估計場的差值分布立體圖。

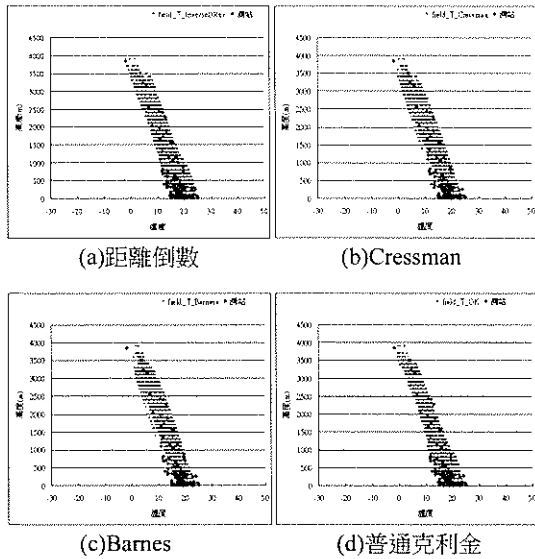


圖 8 利用(11)式溫度趨勢的測站地表溫度和推估網格點地表溫度對高度的關係圖

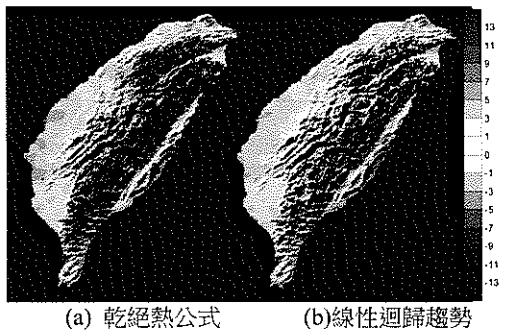


圖 9 使用(a)乾絕熱遞減率和(b)測站地表溫度線性迴歸法趨勢，兩種轉換方法結合 Cressman 客觀分析法。其次再計算兩者分別與通用克利金法估計場的差值分布立體圖。

比較圖 5、圖 7 和圖 8，以及圖 9(a)和圖 9(b)，可以看出，使用去除迴歸趨勢法估計的地表溫度場，比利用乾絕熱遞減率轉換關係的結果，較為接近本研究的通用克利金法的推估結果。

利用線性迴歸趨勢作為溫度轉換關係，可以改進第一類型方法的估計，除了普通克利金法外，其餘三種方法都仍存在影響空間內插的因素，包括：兩相鄰測站代表單一訊息，權重卻加倍的問題；以及權重函數隨距離變化的差異影響。圖 10 為三種方法權重係數隨距離變化的相對關係圖，紅線為 Barnes 法，藍線為距離平方倒數，黑線為 Cressman 法。由圖 10 可知，權重函數與參數的選擇，將影響不同距離測站權重分配之大小，距離平方倒數權重法給予鄰近測站權重大，其隨影響半徑增大而平滑化之現象較不明顯；Cressman 分析法權重隨距離變化於接近影響半徑時才

明顯下降，其隨影響半徑增大而平滑現象屬於中等；而 Barnes 分析法之權重隨距離衰減程度則相當緩慢，於增加影響半徑所致之平滑現象最為嚴重。

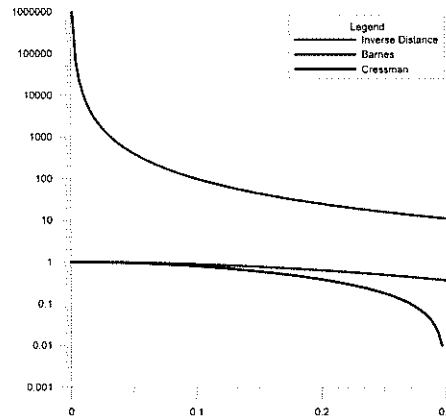


圖 10 權重隨距離變化相對關係圖，紅線為 Barnes 法，藍線為距離平方倒數，黑線為 Cressman 法

四、結論與建議

(一)結論

利用乾絕熱遞減率由地表溫度推估位溫，於 1 atm 等壓力面上內插計算位溫場，再利用乾絕熱遞減率反算回原地表高程溫度的方法，倘若估計點高程較鄰近測站高，將低估地表溫度；若估計點之高程較鄰近測站低，則會發生高估的情形。

本研究提出的通用克利金法，去除半變異圖中的趨勢，配合不偏估條件，可以直接使用測站地表溫度內插估計三維網格點地表溫度。去除海拔高度、緯度趨勢後，溫度半變異圖的積分長度約為 0.05 度，變異數約為 4 度平方。地表溫度受到土地利用、含水量的影響大，是造成積分長度很短的重要原因。

實際上地表溫度場存在溫度隨高度及溫度隨緯度遞減之兩個主要趨勢，使用通用克利金法可同時在含有趨勢之溫度場中進行客觀分析，內插後之結果較能與觀測資料相契合。

用遮蔽測站試驗概念，計算 203 個測站地表溫度估計值與觀測值差異的 RMSE；發現使用乾絕熱遞減率轉換公式時，4 種水平內插方的 RMSE 值均約 2 度；使用本研究導出的通用克利金法，RMSE 值降為 1.6 度，證實通用克利金法的優勢。

距離平方倒數權重法、Cressman 分析法、Barnes 分析法都有新增相鄰站、權重加倍的問題；普通克利金法或通用克利金法則可以避免此項問題。

因為地表溫度去除溫度隨高度及溫度隨緯度遞減兩個主要趨勢後，相關距離極短，可以直接使用多線性迴歸估計溫度遞減趨勢。先去除地表溫度線性迴歸趨勢再內插估計地表溫度的結果，證實和通用克利金法的分析結果接近。

(二)建議

本研究研發含高度及緯度趨勢的通用克利金法，利用遮蔽測站估計試驗，檢驗得到的表現均相當優異，建議作為氣象局估計地表溫度場的客觀分析方法之一。

若以多線性迴歸得到的溫度趨勢，取代乾絕熱遞減率公式，可獲得和通用克利金法大致相同的三維網格點內插結果。因其計算方式較為簡單、內插表現與通用克利金法大致相同，亦是考慮應用的客觀分析方法之一。

五、參考資料

Barnes, S. L., 1964: A technique for maximizing details in numerical weather map analysis. *J. Appl. Meteor.*, 3, 396–409.

Barnes, S. L., 1973: Mesoscale objective analysis using weighted time series observations. NOAA Tech. Memo. ERL NSSL-62, National Severe Storms Laboratory, Norman, OK, 41 pp. [NTIS COM-73-10781.]

Cressman, G., 1959: An operational objective analysis system. *Mon. Wea. Rev.*, 87, 367–374.

Kitanidis, P.K. (1993) "Gestatistics" in "Handbook of Hydrology" edited by D.R. Maidment, McGraw Hill.

六、謝誌

本研究為氣象局 98 年度「應用克利金法建立高解析度網格點氣象數據之研究」計畫之部分成果。計畫呈蒙周博士思運悉心講解地表溫度估計方法與流程，並提供相關程式參考，謹此敬致謝忱。