

球面二維亂流探討

蔡禹明 郭鴻基

國立台灣大學大氣科學研究所

摘要

太陽系中的類木行星，由可見光照片可看出其表面有明顯緯向帶狀的結構，以及大渦旋存在；地球中緯度的高層區域存在著西風噴流，顯示帶狀噴流是行星風系的重要特徵之一。此動力特徵和球面上二維亂流合併的過程，以及背景的行星渦度梯度有關，系統經向的尺度受到萊茵斯尺度 (Rhines scale) 限制，緯向上可無限制成長，最終形成帶狀的結構，甚至出現如大紅斑的大渦旋。

地球上存在著渦旋與地形，二者皆會造成局部的位渦擾動，不同的地方在於：渦旋會移動，地形則靜止。本文延續前人的研究，使用全球波譜模式為研究工具，進一步探討渦旋與地形對於噴流結構的影響。研究結果顯示：(1) 渦旋與地形的附近均出現西風加速的現象。(2) 渦旋對於亂流的組織能力與渦旋本身結構有關。(3) 地形愈規則，有助於動能在較短時間內反串跌到大尺度，約可減少一半的時間。

關鍵詞：二維亂流、球面諧函數、萊茵斯尺度。

一、前言

航海家 2 號 (Voyager 2) 所拍攝的木星照片，如圖 1 (a) 所示，可看出其表面有明顯緯向帶狀的結構，以及位於南半球反時鐘旋轉的大紅斑 (great red spot)。圖 1 (b) 為哈伯太空望遠鏡 (Hubble space telescope, HST) 所拍攝的土星照片，同樣可看出許多緯向帶狀的結構。地球中緯度的高層區域存在著西風噴流，顯示帶狀噴流是行星風系的重要特徵之一。Huang and Robinson (1998) (以下簡稱 HR98)，認為這種現象是球面上二維亂流在合併的過程中，經向上受到萊茵斯尺度的限制，緯向上可無限制成長，而形成帶狀的結構。他們的實驗模擬在物理空間及波譜分析中，均看出渦度及能量場有呈緯向分佈的現象。

地球上的渦旋會造成位渦擾動。圖 2 (a) 為 2005 年 8 月 17 日 09Z 的紅外線衛星雲圖，僅於低緯度地區有些零星對流擾動。(b) 為 2005 年 8 月 31 日 12Z 的紅外線衛星雲圖，左側是強烈颱風泰利，右側是超級強烈颱風娜比，其周圍由於颱風外圍的下沉氣流，大氣是相當穩定無雲的。因此我們想延續 HR98 的工作，探討渦旋這種高渦度聚集，並隨時間移動的系統對於噴流的影響。此外，HR98 的工作並沒有地形的效應，地形會造成其周圍位渦的擾動，不同於渦旋的

效應在於：地形是靜止的。因此我們亦想要探討這種固定的位渦擾動對於噴流結構的影響。

二、理論工作回顧

f plane 上，正壓強旋轉的二維亂流，在考慮黏滯作用的情況下，其基本方程式如下：

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial(\psi, \zeta)}{\partial(x, y)} = \nu \nabla^2 \zeta \quad (1)$$

$$\zeta = \nabla^2 \psi \quad (2)$$

(1) 式為正壓渦度預報方程式，等號左側第二項為渦度平流項，等號右側為黏滯項。(2) 式則為渦度場和流函數之間的關係式。

Batchelor (1969) 由 (1) 及 (2) 式，在考慮近似無黏滯性流體，即 ν 很小的情況下，動能將近似保守，而渦度擬能將往小尺度串跌 (cascade)。這種現象稱為「二維亂流之選擇性衰減」(selective decay of 2-D turbulence)。Kuo et al. (2004) 由模式驗證了這個理論。

二維亂流隨時間會合併成較大尺度的渦旋 (McWilliams, 1984)。當系統尺度不斷增加，將逐漸感受到背景的行星渦度梯度，而激發 β 羅士比波 (β Rossby wave) 將能量由系統中帶走，則系統尺度無法

再繼續成長。Rhines (1975) 定義這個最大的尺度稱做萊茵斯尺度 (Rhines scale)，並經由尺度分析，得到：

$$k_{\beta}^R = \sqrt{\frac{\beta}{V_{rms}}} \quad (3)$$

其中 k_{β}^R 是以波數表示的萊茵斯尺度， V_{rms} 是整個區域中速度場的均方根 (root mean square)，對球體來說，由於只有經向方向上存在行星渦度梯度，因此萊茵斯尺度僅存在於經向方向上，所以萊茵斯尺度是不等方向性的 (anisotropic)。

二維亂流可使用一維能量波譜法分析其特性。由科莫平衡定理 (Kolmogorov equilibrium theory)，定義 ε 為單位質量動能的串跌率，由因次分析，可推導出：

$$E(k) = C\varepsilon^{2/3}k^{-5/3} \quad (4)$$

接著，定義 η 為單位質量渦度擬能的串跌率，同樣由因次分析，可推導出：

$$E(k) = C'\eta^{2/3}k^{-3} \quad (5)$$

其中 C 與 C' 為常數。由 (4) 式及 (5) 式，在雙對數座標 (log-log coordinate) 上，動能與渦度擬能串跌的能量波譜，將分別以 $-5/3$ 及 -3 的斜率呈現。分析系統的一維能量波譜可幫助我們瞭解系統是否已達成穩定平衡。

Vallis and Maltrud (1993)，在淺水模式中植入無經向變化的餘弦函數地形，實驗結果顯示在地形西側出現南風，東側出現北風，此現象可由位渦守恒解釋。Grose and Hoskins (1979)，在線性化後的淺水模式中植入理想的緯向風場及地形，可看出在地形下游處出現正渦度，以及一連串向東南方傳遞的波列。

三、模式介紹

本研究使用的模式，是 Kuo et al. (2001) 之球面諧函數全球波譜模式 (spherical harmonics global spectral model)。選用全球模式來作模擬，優點是不需要處理邊界條件。球面諧函數：

$$Y_l^m(\lambda, \phi) = P_l^m(\mu) \cdot e^{im\lambda} \quad (6)$$

其中 m 是緯向波數， l 是經向波數， P_l^m 是勒壤得多項式 (Legendre polynomials)。球面諧函數是二維拉普拉斯運算子 (Laplacian operator) 的特徵函數

(eigenfunctions)，如下所示：

$$\nabla^2 Y_l^m = -\frac{l(l+1)}{a^2} Y_l^m \quad (7)$$

因此，我們將感興趣的變數場，投影到正交的球面諧函數後，計算拉普拉斯運算子的效率將遠高於使用有限差分法 (finite difference method)。

數值模擬的部分，考慮模擬的正確性及計算效率，採用 T64，三角形截斷於第 64 個波。東西方向微分運算使用快速傅立葉轉換 (fast Fourier transform, FFT)，以 32 個正弦波和 32 個餘弦波當作基本函數 (basis functions)。南北方向微分運算使用勒壤得轉換，以 64 個勒壤得多項式當作基本函數。同時，南北方向的積分方法使用高斯求積法 (Gaussian Quadrature)，所以在南北方向上的網格點數可減半。

如圖 3 所示，T64 全球共有 192×96 個規則分佈的網格點，網格點間距 (grid spacing) 為 1.875 度，在赤道上約為 208 公里。模擬中所植入的亂流場是參考 HR98 植入的初始場：在總波數 35 到 45 之間的所有緯向波譜係數給亂數。時間積分格式使用跳蛙法，時間積分間距為 300 秒，為避免使用跳蛙法而造成時間積分上「奇偶時步分裂」的現象，我們採用羅貝時間濾波器 (Robert time filter)，所使用的係數值為 0.05。

我們以 HR98 中衰減亂流的實驗，作為測試我們模式表現的工具。實驗參數與 HR98 完全相同。模式積分 80 天，取不同亂數值做十組實驗。圖 4 為其中一組實驗之物理空間渦度場，圖 (a) 為初始亂流渦度場分佈，圖 (b) 為積分 80 天後的結果，因為有擴散項，所以渦度值隨時間減小，圖中可明顯看出最終渦度聚集在緯向帶狀的結構中，而這些東西方向帶狀的結構，其在南北方向上的尺度即為萊茵斯尺度。圖 5 為使用二維能量波譜法之分析結果，取積分 80 天後十組實驗的系集平均。圖 (a) 為初始場的二維能量波譜，可看出能量聚集在總波數 35~45 之間。圖 (b) 為積分 80 天後的結果，可清楚看出能量聚集在一個類似漏斗形狀的區域中，顯示動能反串跌到緯向結構中。實驗結果與 HR98 的實驗結果相同，顯示我們的模式有能力模擬這種能量聚集在緯向帶狀結構的現象。如此我們可進一步探討渦旋及地形對於噴流結構的影響。

四、植入渦旋之實驗

氣候統計資料顯示，每年全球平均有 80 個颱風，假設每個颱風的生命期大約是 8 天，則平均每天全球有 1.75 個颱風。因此，我們想要探討渦旋這種高渦度聚集的系統對於緯向噴流結構的影響。

模式中所使用的正壓方程式為：

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -J(\psi, \zeta + f) - \kappa \zeta - D\zeta \quad (8)$$

等號右手邊第二項為線性曳力項，加入這個項的原因是為了避免動能往大尺度反串跌的過程中，在萊茵斯尺度的地方累積。給定 $\kappa = 1.157 \times 10^{-8} \text{ s}^{-1}$ ，其對於渦度場的 e-folding 時間為 1000 天。第三項為高階擴散項，此項的衰減率對於波數是高選擇性的。加入這個項的目的是為了避免渦度擬能在往小尺度串跌的過程中，在最小尺度的地方累積。給定的值對於最高波數的波來說，其解析出之渦度場的 e-folding 時間是 0.5 天。

所進行的第一組模擬實驗，目的是想要比較植入渦旋與未植入渦旋，對於噴流所造成的影響。在實驗 A 中，植入一亂流場，實驗 B 中，植入相同的亂流場外，同時在南北緯 20 度的地方植入兩個強度類似輕度颱風的渦旋。所植入的亂流場計算出均方根速率為 7.00 ms^{-1} 。實驗 B 所植入的二個渦旋，是 DeMaria and Chan (1984) 所使用，當形狀參數 $b = 1.0$ 的渦旋公式，以下簡稱 DC 渦旋。這種渦旋外圍存在負渦度區，這與目前一些颱風的觀測資料吻合。在我們的模式中，植入渦旋的風場後，再由非線性平衡方程式計算出所對應的渦度場。植入二個 DC 渦旋，將使整個區域的均方根速率增加 0.01 ms^{-1} 。時間積分的部分，模式積分至 3000 天，一個原因是考慮長期來說，全球一直存在二個颱風；另一個原因是根據 HR98 的實驗結果，積分至 3000 天可達到穩定的模擬結果 (steady state)。

圖 6 (a) 為實驗 A 之初始亂流渦度場。(b) 為實驗 A 積分 3000 天後的渦度場結果，出現大尺度的渦度帶，由於有衰減項，渦度帶很弱。實驗 B 之初始渦度場與實驗 A 相似。(c) 為實驗 B 積分 3000 天後的渦度場結果，在植入渦旋的附近出現二條明顯的渦度帶，推測原因是因為渦旋具有較強的非線性平流效應，有利於組織其附近的亂流形成結構較紮實的渦旋，進而具有更強的組織能力，因此藉由非線性效應可以抵抗線性曳力項和高階擴散項的衰減效應。

Kuo et al. (1994) 研究在比克萊東風噴流

(Bickerly easterly jet) 的環境中，若有小擾動，將產生正壓不穩定，則渦度帶的緯向波長約為經向寬度的 4 倍。由圖 6 (c) 最後渦度場的分佈，北半球的渦度波長約為 45° ，而經向寬度約為 11° ，與 Kuo et al. (1994) 的結果相吻合。

圖 7 為實驗 A 之緯向平均緯向風取 3000 天的時間平均，可看出生成數個微弱風帶。圖 8 為實驗 B 在 3000 天時的物理空間緯向風，在植入渦旋的附近西風有增強的現象；同時，西風帶南北等風速線的分佈是同相位，此為正壓外模 (external mode) 的特徵，由於只受平均流帶動，移速較斜壓模來得快。圖 9 為實驗 B 之緯向平均緯向風隨時間的變化，可看出風帶往高緯移動，這是由於地球自轉的 β 效應。圖 10 為實驗 B 之緯向平均緯向風取 3000 天的時間平均，可看出在植入渦旋的附近出現明顯的西風分量，這樣的結果與 Ferreira and Schubert (1999) 的實驗結果，渦旋會造成其附近西風加速相吻合。

接著我們探討不同渦旋結構對於噴流所造成的影響。將實驗 B 所植入的 DC 渦旋換成強度相仿的高斯渦旋以及阮肯渦旋。實驗結果並未出現明顯的帶狀結構，推測原因為 DC 渦旋外圍有負渦度區，不與亂流中的正渦度合併，因地球旋轉渦旋被拉伸成帶狀，由於區域較小而衰減較慢。高斯與阮肯渦旋由於與周圍亂流合併成較大的尺度，衰減較快，因此最終強度較弱。

五、植入地形之實驗

地球上存在著許多山脈地形，地形的存在會造成周圍流體厚度變淺，由位渦守衡方程式，造成背景的渦度梯度，因此同樣存在萊茵斯尺度，於是我們想要探討地形對於噴流的影響。

實驗所使用的模式是球面譜函數淺水波譜模式，T64。在 (8) 式中給定 $\kappa = 2.315 \times 10^{-8} \text{ s}^{-1}$ ，其對於渦度場的 e-folding 時間為 500 天，這是因為地形可視為永久之強迫作用，因此所給的衰減率較植入渦旋的實驗大。給定平均深度為 2000 公尺，如此重力波波速為 140 ms^{-1} ，模式積分 90 天。

所植入理想地形的最大高度為 1500 公尺。所植入地形之中心點位於赤道， 180°E 。實驗 A 未植入地形；實驗 B 植入半徑為 4000 公里的圓形地形，其尺

度與波數 5 的波長相近；實驗 C 植入的地形橫軸為 2500 公里，縱軸為 8000 公里，其型式類似安地斯山脈；實驗 D 為實驗 C 的地形橫放，其型式類似歐洲的阿爾卑斯山脈及青康藏高原；實驗 E 為實驗 C 的地形以中心點為圓心，右轉 45°；實驗 F 為左轉 45°，其型式類似北美洲的落磯山脈。

由積分 90 天後的物理空間渦度場，在沒有植入地形的實驗 A 中，形成的系統尺度較小；在植入橫向地形的實驗 D 中，所產生出的緯向渦度結構較紮實，強度亦較強。圖 11 為實驗 B、E 積分 90 天後的一維雙對數座標能量波譜分析結果。橫軸為總波數 (n)，縱軸為動能波譜 $E(n)$ 。圖中短虛線為 $n^{-5/3}$ ，點虛線為 n^{-3} 。可看出實驗 B 出現了完整 -3 及 -5/3 的斜率；實驗 E 則無。實驗 C、D 的結果與實驗 B 相似，實驗 A、F 的結果與實驗 E 相似。經過測試，實驗 A、E 及 F 需積分至 180 天才會出現完整 -5/3 及 -3 的斜率，所需時間約為規則地形（軸與經緯線平行之地形）的 2 倍，這樣的結果顯示規則地形有助於動能在較短時間內反串跌到大尺度。圖 12 為實驗積分 90 天後，實驗 A、C 及 D 之緯向平均緯向風取時間平均的結果。可看出在植入地形的附近有明顯的西風分量，其尺度與地形的尺度相近。

六、結論

球面上的二維亂流由於其經向方向上之成長受到萊茵斯尺度限制，緯向方向上可無限制成長，因此會形成帶狀的結構。本文延續 HR98 的工作，探討渦旋與地形對於緯向噴流結構的影響。研究結果顯示：

- (1) 渦旋與地形的存在均有使其周圍出現西風加速的現象。
- (2) 渦旋對於亂流的組織能力與渦旋結構有關。
- (3) 規則地形（軸與經緯線平行的地形），有助於動能在較短時間內反串跌到大尺度，約可減少一半的時間。
- (4) 植入渦旋與地形所得到的時間平均緯向平均緯向風不如 HR98 中的圖 4 平滑。

地球南北的溫度梯度是造成中緯度西風帶的主要原因，斜壓不穩定使緯流可用位能轉換為渦流可用位能，會扮演使西風減弱的角色。未來將進一步探討地形配置與波數間的關係；並植入追蹤參數，探討被動純量 (passive scalar) 波譜的分佈。

七、參考文獻

- Batchelor, G. K., 1969: Computation of the energy spectrum in homogeneous two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, **12**(Suppl. II), 233-239.
- DeMaria, M., and J. C. L. Chan, 1984: Comments on "A numerical study of the interactions between two tropical cyclones." *Mon. Wea. Rev.*, **112**, 1643-1645.
- Ferreira, R. N., and W. H. Schubert, 1999: The role of tropical cyclones in the formation of tropical upper-tropospheric troughs. *J. Atmos. Sci.*, **56**, 2891-2907.
- Grose, W. L., and B. J. Hoskins, 1979: On the influence of orography on large-scale atmospheric flow. *J. Atmos. Sci.*, **36**, 223-234.
- Huang, H.-P., and W. A. Robinson, 1998: Two-dimensional turbulence and persistent zonal jets in a global barotropic model. *J. Atmos. Sci.*, **55**, 611-632.
- Kuo, H.-C., and C.-H. Horng, 1994: A study of finite amplitude barotropic instability. *TAO*, **5**, 199-243.
- Kuo, H.-C., R. T. Williams, Jen-Her Chen, and Yi-Liang Chen, 2001: Topographic effects on barotropic vortex motion: no mean flow. *J. Atmos. Sci.*, **58**, 1310-1327.
- Kuo, H.-C., L.-Y. Lin, C.-P. Chang, and R. T. Williams, 2004: The formation of concentric vorticity structures in typhoons. *J. Atmos. Sci.*, **61**, 2722-2734.
- McWilliams, J. C., 1984: The emergence of isolated coherent vortices in turbulent flow. *J. Fluid Mech.*, **146**, 21-43.
- Rhines, P. B., 1975: Waves and turbulence on a beta-plane. *J. Fluid Mech.*, **69**, 417-443.
- Vallis, G. K., and M. E. Maltrud., 1993: Generation of mean flows and jets on a beta plane and over topography. *J. Phys. Oceanogr.*, **23**, 1346-1362.

八、附圖

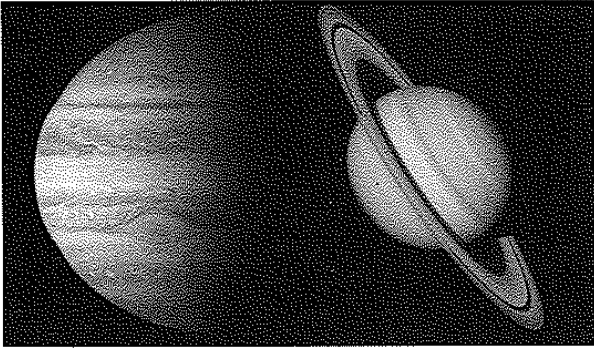


圖 1 (a) 航海家 2 號在接近木星時所拍攝的照片。可清楚看出木星表面緯向的噴流結構，以及位於南半球反時鐘旋轉的大紅斑。(b) 哈伯太空望遠鏡所拍攝的土星照片，由圖中可看出許多緯向帶狀的結構。

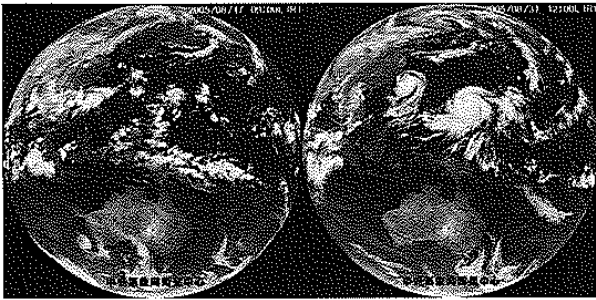


圖 2 (a) 2005 年 8 月 17 日 09Z 的紅外線衛星雲圖，僅於低緯度地區有些零星對流擾動。(b) 2005 年 8 月 31 日 12Z 的紅外線衛星雲圖。左側是強烈颱風泰利，右側是超級強烈颱風娜比。其周圍由於颱風外圍的下沉氣流，大氣是相當穩定無雲的。

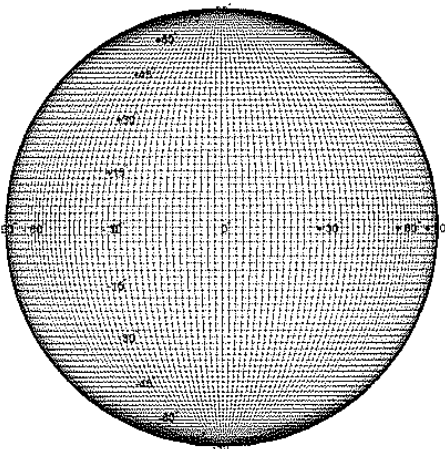


圖 3 T64 的全球網格點分佈圖。全球共有 192×96 個網格點，網格點間距為 1.875 度。

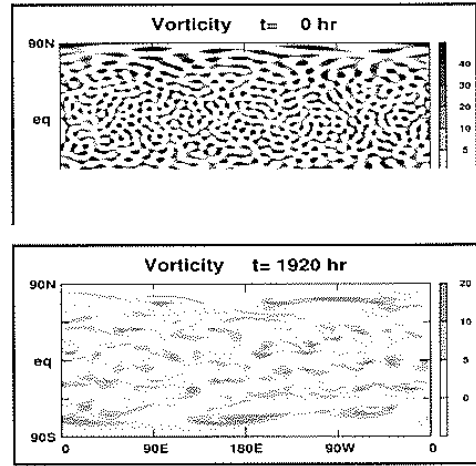


圖 4 衰減亂流實驗之渦度場。(a) 為初始亂流場，(b) 為積分 80 天後的結果。僅繪出正渦度的部分，值為原渦度值乘以 10^6 (s^{-1})。在 (b) 中可明顯看出渦度呈帶狀分佈。

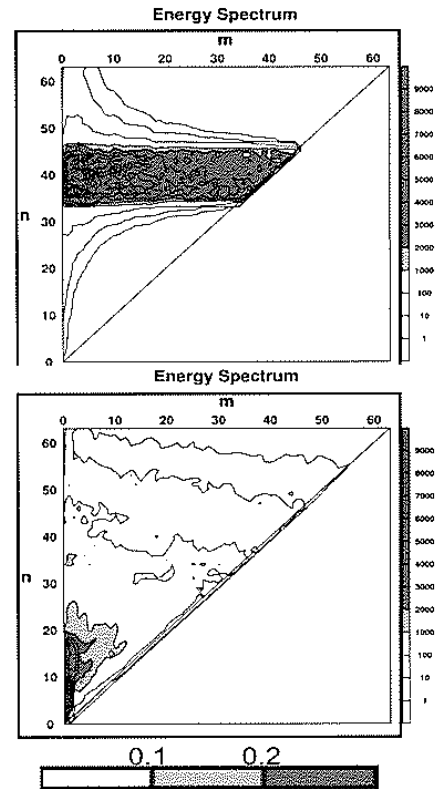


圖 5 衰減亂流實驗之初始場，以二維能量波譜分析十組實驗系集平均的結果。圖中橫軸為緯向波數，縱軸為總波數，圖中最大值標準化為 1，值超過 0.1 的區域為淺灰色，值超過 0.2 的區域為深灰色，可看出初始能量聚集在總波數 35 ~ 45 之間。(b) 為積分 80 天後的二維能量波譜分析結果，可清楚看出能量聚集在一個類似漏斗狀的區域中，顯示動能反串跌到緯向結構中。

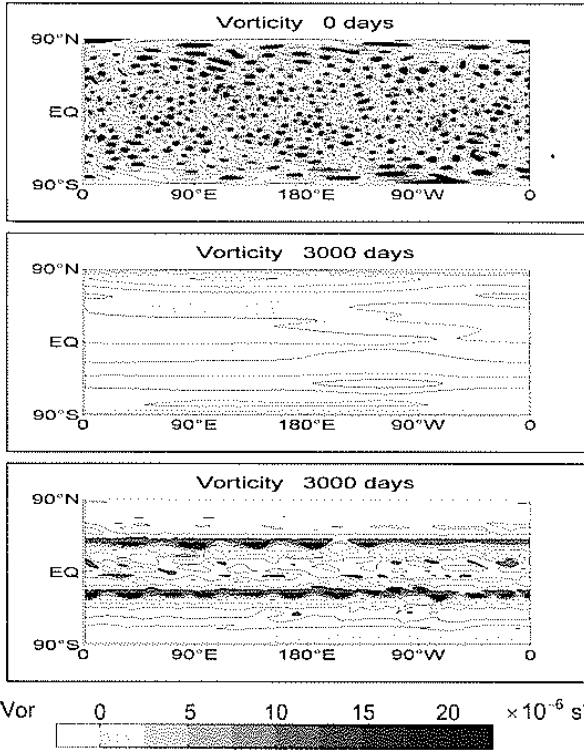


圖 6 (a) 實驗 A 之初始亂流渦度場。(b) 實驗 A 積分 3000 天後的渦度場結果。(c) 實驗 B 積分 3000 天後的渦度場結果。

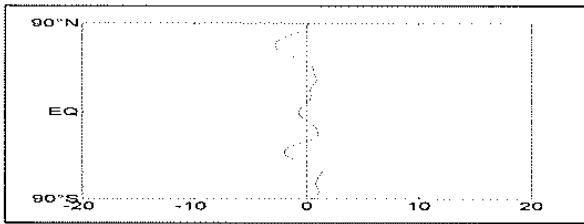


圖 7 實驗 A 之緯向平均緯向風取時間平均。

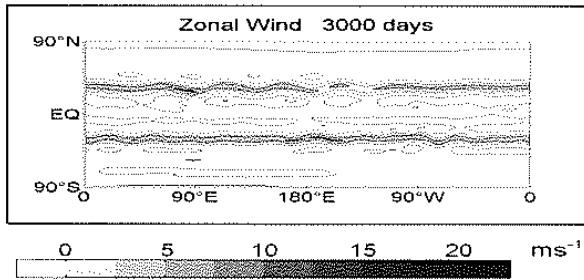


圖 8 實驗 B 積分 3000 天後的緯向風分佈。

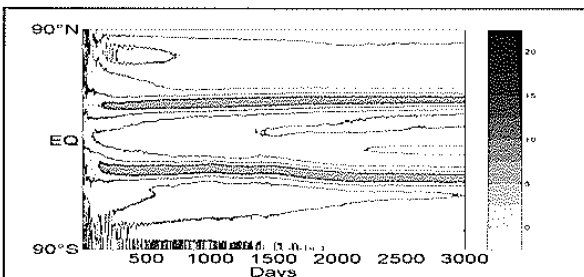


圖 9 實驗 B 緯向平均緯向風隨時間的變化。

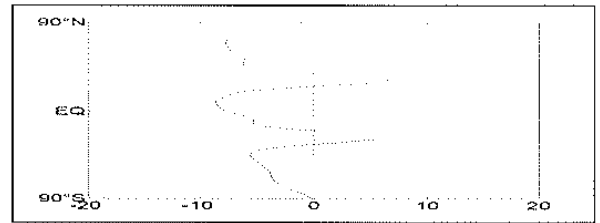


圖 10 實驗 B 之緯向平均緯向風取時間平均。

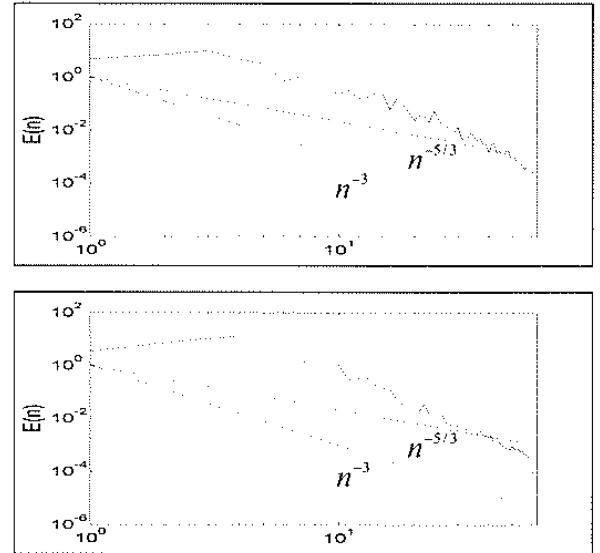


圖 11 理想地形實驗積分 90 天後的一維雙對數座標能量波譜分析結果。橫軸為總波數 (n)，縱軸為動能波譜 $E(n)$ 。圖中短虛線為 $n^{-5/3}$ ，點虛線為 n^{-3} 。

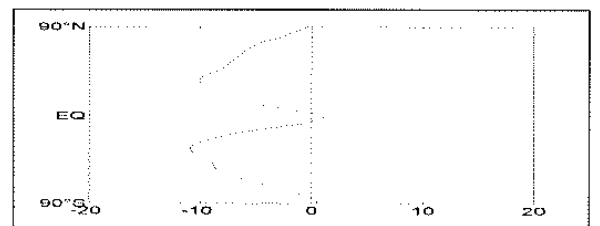
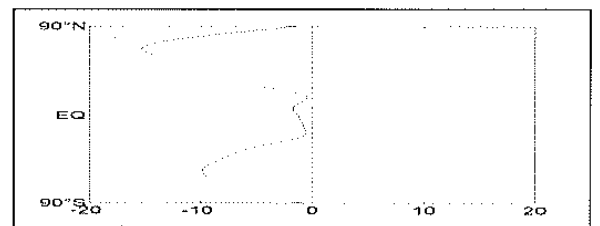
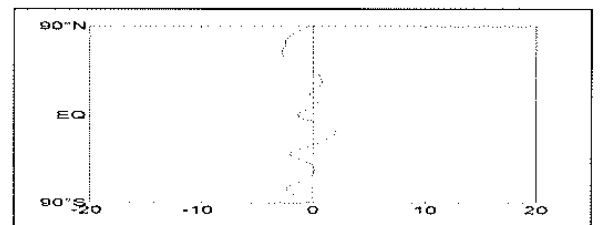


圖 12 理想地形實驗，緯向平均緯向風 (ms^{-1}) 取 90 天的時間平均。