

半拉格朗日法平流內插的計算過程研究

張博雄¹ 曾忠一²

¹ 中央氣象局

² 中央研究院物理研究所

摘要

半拉格朗日平流格式近來普遍受到採用，因為這個方法有穩定、準確、且有效率的優點。但是由於出發點通常不在固定的網格點，平流過程必須使用大量的內插計算，這個過程佔去大量的計算時間，而且內插格式越高階則計算內插的時間也越多。透過串聯內插方法(cascade interpolation)的計算，可以縮短內插計算的時間。一般的無輻散流場平流過程顯示串聯內插格式是省時且結果接近於傳統方法的格式。雲模式模擬顯示，串聯內插結果與其他結果相近。在這實驗中我們也提出三度空間的串聯內插流程，結果顯示，串聯內插可以大幅減少三度空間的內插計算，且計算結果甚至較單調格式好。

關鍵字：半拉格朗日法，串聯內插，雲模式

一、前言

半拉格朗日法近年來成為受注目的數值方法，在許多模式中，半拉格朗日法表現出極佳的計算速率，但是內插的過程仍然是限制半拉格朗日法快速計算的因素。以三度空間計算過程的例子來說，每個預報變數每個出

發點必須運用到 $O(p^3)$ 次計算。如果是三次內插函數，那麼 p 就等於4，對於更高次的內插函數而言，計算次數將呈現倍數成長。Purser and Leslie (1991)提出可以改變數值計算的概念，透過循序的一維內插過程，進行半拉格朗日平流內插的計算。他們將複雜的高次內插過程簡化到只需 $O(p)$ 次計算。

Purser and Leslie (1991)所提出的概念，首先定義一組固定網格與拉格朗日網格，其中拉格朗日網格由出發點所組成。這兩個網格系統的交點為中繼點(intermediate point)，通常位於固定網格上，利用一般的內插方法可以很快的得到中繼點的值。而通常中繼點又位於出發點所組成的曲線上，透過延曲線的內插就可以得到出發點的值，如此，一個出發點僅需兩次的計算即可。當然，這些內插格式可以應用線性、二次、三次或更高次格式來進行。Nair 等人(1999)應用單調格式與串聯內插方法，並且提出二維座標轉換的計算過程，顯示守恆格式可以輕易的加入。在串聯內插的方法中，求得出發點的值必須利用到固定網格與拉格朗日網格的交點。若交點過於集中，或時步過大造成出發點曲線相交，則串聯內

插可能無法計算，而必須採用傳統方法求解。更有可能是由於 overshoot 或 undershoot 造成的流場扭曲，使得串聯內插無法計算。

本研究將採用無輻散流場測試串聯內插格式的穩定性、保守性及效率，對於串聯內插格式的運用進行探討，另外運用雲模式進行實際個案模擬。最後進行三維串聯內插格式的探討。

二、研究方法

我們採用如 Nair 等人(1999)的方法，定義拉格朗日曲線網格是同一時步的出發點組成。二度空間作為例子，以 $x = \text{constant}$ 的 y 軸的出發點組成一個拉格朗日曲線座標的 Y 軸，這個 Y 軸將會與固定網格的 x 軸交於中繼點，如圖 1 中的 x 點，出發點則由 \cdot 表示。首先利用固定網格的資料，內插到中繼點，再由另一次內插將中繼點的資料內插到出發點上。進行步驟如下：

1. 透過方法求出上游出發點的位置（向後差分），決定拉格朗日座標系統。
2. 決定中繼點在固定網格系統的位置，既出發點所決定的各個曲線與 x 軸的交點，利用內插求出中繼點的值。
3. 將所有固定網格點上的值轉換到拉格朗日座標的中繼點上。
4. 沿著每個 Y 軸將中繼點值內插到出發點上。

三、研究結果

研究程式利用張與曾(2000)所發展雲模式中的半拉格朗日平流過程，

過程利用 INTEL Fortran 編譯器 (LINUX 版) 進行編譯，故計算時間以 Pentium4 為主。

1. 二維無輻散風場及變形流場平流測試及單調格式

我們利用線性平流方程來平流一個物理量場，不考慮其他外力強迫。實驗所利用的旋轉風場為無輻散的，以避免物理量場因輻散而導致形狀的改變。半拉格朗日法和 QMSL 的內插計算採用三次樣條(cubic spline)函數。

我們採用串聯內插格式計算出發點的值，計算參數與前相同。若不考慮單調格式，則實驗結果與傳統格式相近，但增加計算時步之後，就會造成無法計算的情況。原因是由於串聯格式的構成必須找出中繼點。由於增加時步，造成非單調格式的 overshoot 及 undershoot 過大，形成出發點曲線扭曲，無法求出中繼點。

考慮串聯內插，內插格式採用三次樣條內插，單調格式採用 QMSL 法，則計算時間為 23.968 秒，均方差為 0.0902，計算時間明顯減少，所計算的格式總量守恆性較 Nair 等人(1999)的結果要好，均方差稍大，Nair 等人(1999)的為 0.06。若考慮線性內插則計算時間只有 16.96 秒，但由均方差 0.1626 可知，線性內插對於物理量場有很大耗散，通常僅用來計算出發點的位置。

在變形流場平流的問題，我們採用 Smolarkiewicz(1992)和 Staniforth and Cote(1987)的分析方法作為工具來研究這些格式在典型的大氣流場下的表現。首先利用三次樣條內插與單調格式的結果如圖 3，實驗計算總時間

為 70 秒，計算時步為 0.7 秒，計算時間為 4.35 秒。長時間計算結果，預報場呈現蛋杯形狀。若利用串聯內插方法計算，則計算時間大約 3.546 秒，相關數據與傳統方法近近似，但是總平方和明顯較小。計算時間較傳統方法減少 10%-20%。若串聯內插不考慮單調格式，則仍然無法進行計算。

2. 三維串聯內插格式探討

串聯內插格式的構想是利用拉格朗日座標定義出另一座標系統，再找出固定座標與拉格朗日座標的交點，運用固定網格上已知的網格資料，直接內插至出發點上。可以想見平滑流場中，可以容易的定義出出發點與固定網格的交點。但若流場呈現高度湍流或時步過大，則出發點可能集中於某一區，如圖 1。無法找出交點，亦即無法利用網格點資料，找出中繼點，就無法進行內插。相同的想法，雖然 Purser and Leslie (1991) 等人依照二維求解流程提出三維求解流程，但實際作業時，並無法找到對於已知網格點資料的高階內插方法。因此，我們利用二維串聯內插的概念，在三維空間中，定義出每個 Z 軸的出發點軌跡線，利用線性內插求出與 z 平面的交點（中繼點），然後再利用三次樣條內插，求出出發點軌跡線上的出發點的值。

考慮模式推展至三維，我們將單調平流格式推廣至三維流場，在進行三維流場的實驗時我們採用的 QMSL 內插方式，先進行三維內插計算，然後求取位於出發點周圍內插點的極大極小值，也就是從出發點水平方向的周圍極值推展至三個方向周圍的極值，其

餘進行 FCT 方法的計算並不改變。

由於兩種單調格式最初都是應用在二維的平流格式中，因此是否適用於三維平流的情況值得進一步探討。我們採用一個正立方體的積分範圍，其中包含無輻散的旋轉流場，旋轉軸並不垂直任何一個平面，避免旋轉侷限在平面上。初始場的流體元為圓形，極大值位於中心並且向外線性遞減到零。

傳統內插法考慮單調格式的結果，極大值為 0.80257，均方差為 26.3，計算時間為 2 分 45 秒。若採用串聯內插格式，極大值為 0.8263，均方差為 21.75，計算時間為 1 分 36 秒。如果考慮質量守恆的話，傳統方法為 0.882572，串聯內插格式為 0.999993。

四、結論：

傳統內插格式所需的內插資料通常不在固定的網格點上，必須透過額外的內插步驟求得，因此，一個出發點的計算步驟非常多。如果在三度空間的計算則所需計算時間更為可觀。透過重新定義的座標系統，可以利用已知的固定網格資料求得出發點的值，而且計算步驟減少。

透過實驗可知，串聯內插格式確實可以節省計算的時間。在無輻散實驗中，各項數據與半拉格朗日法單調格式相近。而且可以容易的與單調格式結合。計算時間約可減少 10-20%。在實際雲個案模擬中，串聯內插格式的預報值較傳統內插法小，但與 Soong & Ogura 的結果接近，下降氣流有產生另一組新對流胞，不同於傳統格式會減弱。三維串聯格式為新的計算方式，雖然在求取中繼點採用線性內

插，出發點採用三次樣條，但結果顯示，與傳統方法相近，甚至均方差較小。而且新的串聯內差計算時間明顯減少，顯示三度空間高次內插的計算時間非常龐大，節省時間接近 1/2，顯示串聯內插格式在三度空間計算是有潛力的方法。

不過由於串聯內插格式的架構，必須找到中繼點的位置。因此，複雜流場的計算採用串聯內插格式時仍需小心。根據實驗，若無法與單調格式結合，則串聯內插格式可能無法在實際大氣模擬中進行，或者時步將受到限制。因此，大尺度大氣模擬或氣候模式是採用串聯內插格式的較佳選擇，而中小尺度模擬則必須採用單調格式或其他的形狀保守格式。

參考文獻：

- 張博雄、曾忠一，1998：半拉格朗日法單調平流格式的數值實驗。大氣科學，26，325-342。
- 張博雄、曾忠一，2000：半拉格朗日法雲模式在中小尺度模擬的應用。大氣科學，28，161-175。
- Bermejo, R., and A. Staniforth, 1992: The conversion of Semi-Lagrangian advection schemes to Quasi - Monotone schemes. *Mon. Wea. Rev.*, **120**, 2622-2632.
- McDonald, A., 1999: An examination of alternative extrapolation to find the departure point position in a "two-time-level" semi-Lagrangian integration. *Mon. Wea. Rev.*, **127**, 1985-1993.
- Nair, R., J. Cote, and A. Staniforth, 1999: Monotonic cascade interpolation for semi-Lagrangian advection. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **125**, 197-212.
- Purnell, D. K., 1976: Solution of the advective equation by upstream interpolation with a cubic spline. *Mon. Wea. Rev.*, **104**, 42-48
- Purser, J. R. and L. M. Leslie, 1988: A semi-implicit semi-Lagrangian finite difference scheme using high-order spatial differencing on a nonstaggered grid. *Mon. Wea. Rev.*, **116**, 2069-2080.
- Purser, J. R. and L. M. Leslie, 1991: An efficient interpolation procedure for high-order three-dimensional semi-Lagrangian models. *Mon. Wea. Rev.*, **119**, 2492-2498.
- Ritchie, H., 1986: Eliminating the interpolation associated with the semi-Lagrangian scheme. *Mon. Wea. Rev.*, **114**, 135-146.
- Smolarkiewicz, P. K., and G. A. Grell, 1992: A class of monotone interpolation schemes. *J. Comput. Phys.*, **101**, 431-440.
- Staniforth, A., and J. Côté, 1991: Semi-Lagrangian integration scheme for atmospheric models--A review. *Mon. Wea. Rev.*, **119**, 2206-2223.
- Williamson, D. L., and P. J. Rasch, 1989: Two-dimensional semi-Lagrangian transport with shape-preserving interpolation. *Mon. Wea. Rev.*, **117**, 102-129.

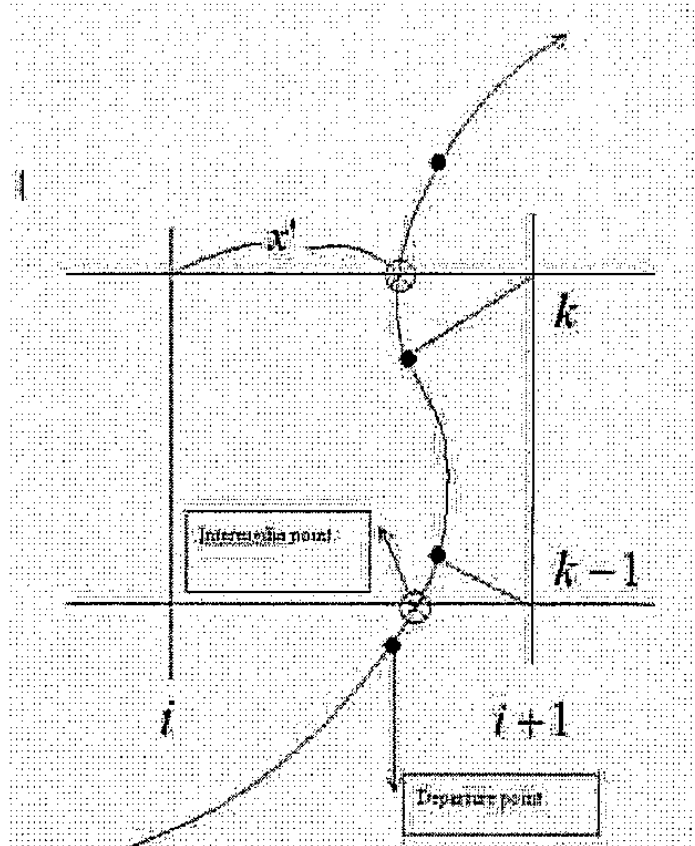


圖 1 $x=i+1$ 軸的出發點軌跡與 Y 軸無交點(中繼點)的示意

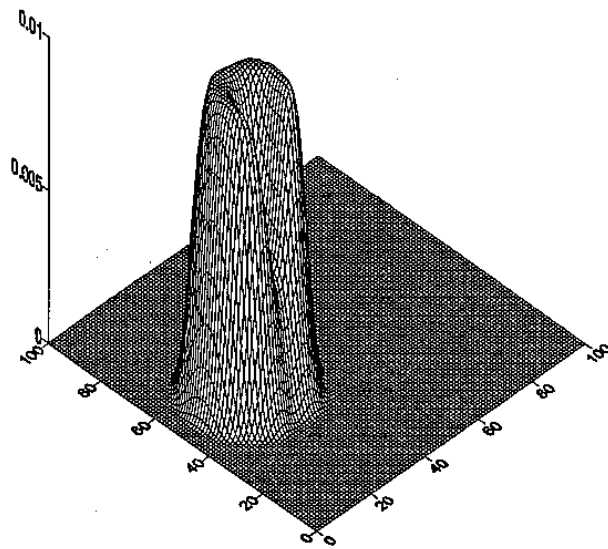


圖 2 串聯內插格式實驗旋轉六圈的結果立體圖。

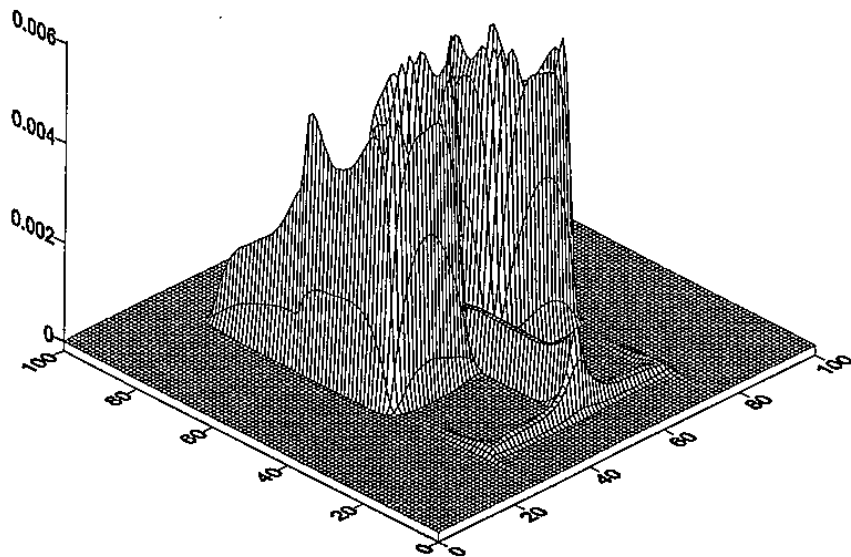
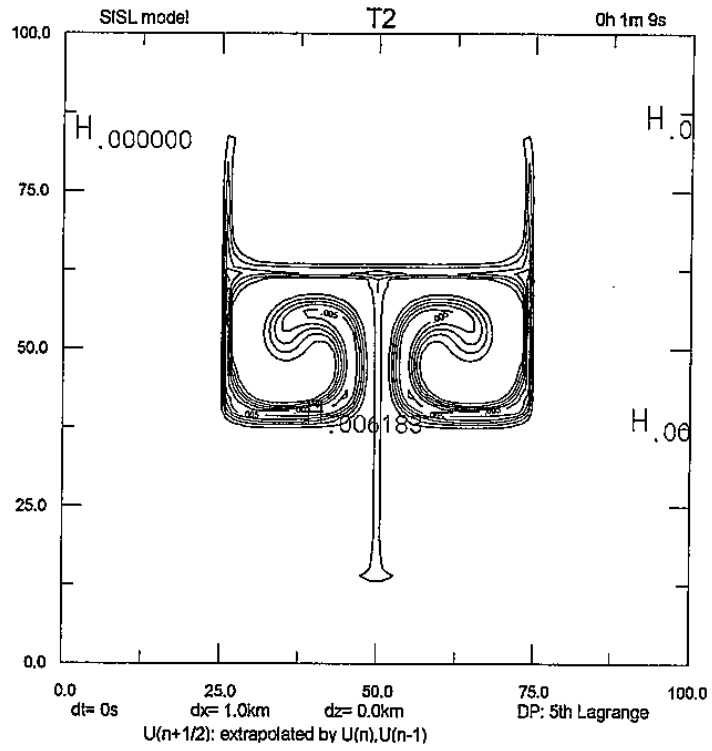


圖 3 串聯內插格式變形流場實驗結果被平流變數的分布圖。下圖為被平流變數的立體圖。