

以有限元素法模擬大角度入射之波浪變形

許泰文 藍元志 林貴斌

水利及海洋工程研究所

國立成功大學

摘 要

本文利用有限元素法解析橢圓型態之緩坡方程式，用以模擬波浪大角度入射時之波場。文中將輻射邊界條件以二項式展開至二階，以處理波浪斜向入射之問題，並以二次形狀函數建立波場模式。文中以不同之障礙物進行實例計算，探討數值模式之計算能力及適用範圍。計算之實例包括波浪通過等水深直立圓柱以及半球型淺灘問題。數值模式計算結果與前人之理論解析或試驗結果進行比較及驗證，顯示模式之預測值與解析解或試驗值呈良好之一致性。

一、前言

台灣四面環海，當波浪由外海向近岸傳播時，由於地形水深之變化與近岸結構物之影響，波浪會發生折射、繞射、反射、淺化及碎波等變形，爲了描述這些物理現象，以數值方法來模擬分析近岸波場爲重要的方法之一。一般而言，利用數值方法模擬近岸波場之變化時，在不考慮碎波情況下，經常遇到的問題爲不規則邊界之處理與波浪大角度入射問題；目前常用的數值方法爲有限差分法，但受限其離散化過程之影響，其矩形正交網格不易與不規則邊界契合，且對於結構物附近局部波場模擬之網格較爲粗糙，而造成解析度相對降低，此爲有限差分法在使用上之限制，因此，爲了避免上述之問題，以有限元素法來模擬近岸波場則爲可行方法之一。有限元素法的優點在於可根據邊界特性，調整適當之網格，達成邊界契合之計算領域，對於不規則邊界之處理有較佳的靈活性。

往昔學者利用有限元素法處理波浪斜向入射之問題時，對於外海開放邊界之處理，大多採用之輻射邊界條件是假設波浪以垂直邊界的方向通過邊界。但事實上，由於波浪受到地形水深的改變或結構物之影響，使得波浪通過開放邊界時，並不一定會以垂直方向通過邊界，因而導致計算結果與實際情形之差距。爲了解決此一問題，則必須對外海開放邊界輔以解析解或其他數值方法(Berkhoff, 1972、Chen and Mei, 1974、Bettess and Zienkiewicz, 1977、陳及蔡, 1990)，亦或設置特殊之邊界，如圓形或半圓形邊界(蘇, 1993)。但此種處理方式必須滿足設定邊界處爲等水深，或劃定之邊界需符合等水深波浪反射之條件，如此一來，邊界條件的設定更趨於複雜。基於上述的種種因素，引發了本文研

究的動機，希望能以一般化之輻射邊界條件，處理波浪大角度入射之問題，而不需將外海開放邊界再經過特別的處理，如此將可簡化模式的複雜性，並提升模式效率。

文獻中針對波浪大角度入射之邊界處理的研究有 Booij (1981) 利用 Radder (1979) 之拋物線模式，以近似邊界條件的方法，發展出一個可以處理波浪斜向入射之模式。Dingemans (1983) 利用一階的 Pade 近似法近似輻射邊界條件，將可處理之波浪傳遞角度擴展至 56.5 度；Kirby (1986) 再利用二階的 Pade 近似法近似邊界條件，而將能處理的波浪傳遞角度提升至 70 度。Hsu and Wen (1997) 利用有限差分法模擬波浪大角度入射問題，採用時變性拋物線型的緩坡方程式，模式中對於輻射邊界條件之處理係於方程式中以疊代法計算散射波通過邊界的角度，此種處理方法能將波浪波數的圓關係加以保存，而有不錯的計算結果。許等人(1998) 則利用有限元素模式，對於輻射邊界條件以二項式展開至三階近似，用以處理波浪大角度斜向入射問題，但其選用之線性形狀函數，並無法反應輻射邊界條件之高階微分項，導致計算出各階結果差異不大，並未達到預期之目標，但其邊界條件之處理方式提供重要之參考方向。

本文主要針對波浪大角度斜向入射問題進行研究，並考量方便處理不規則邊界爲出發點，引用許等人(1998) 處理輻射邊界條件之概念，將一般化之輻射邊界條件以二項式展開至二階，並採用二次形狀函數來建立有限元素數值模式，以減少因邊界條件設置不當造成計算領域內多餘反射波之重疊，提高計算之精度。文中並將選取兩種折、繞、反射問題，驗證本文模式模擬波浪大角度斜向入射之波場變化之能力。

二、基礎理論

本文中模式計算所採用之座標系統如圖 1 所示，包含卡氏座標系統 (x,y)，以及計算邊界上之局部座標系統 (n,s)，其中 n 為垂直邊界之法線方向，s 為平行邊界之切線方向，(n,s) 座標系統在外部計算領域邊界遵循逆時針法則，內部結構物邊界則為順時針方向。

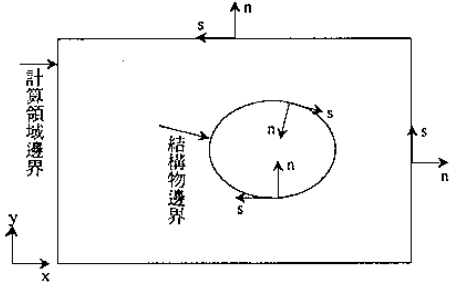


圖 1 計算領域之 x、y 座標與 n、s 座標關係圖

模式採用橢圓型態之緩坡方程式作為控制方程式，其表示如下：

$$\nabla \cdot (CC_g \nabla \eta) + CC_g k^2 \eta = 0 \quad (1)$$

式中， $\eta = \eta(x, y)$ 為波浪流速勢，C 為波速 (wave celerity)， C_g 為群波速度 (group velocity)，k 為週波數； $k = 2\pi/L$ ， ω 為角頻率； $\omega = 2\pi/T$ ，L 為波長，T 為週期，而 ∇ 為水平方向梯度； $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ ，x 表垂直海岸線座標；y 為平行海岸線座標。

模式計算採用之邊界條件，依邊界條件特性可分為全反射邊界、部分反射邊界、輻射邊界條件以及外海波浪入射邊界條件等。其中全反射邊界、部分反射邊界則可以由輻射邊界條件表示之。本文利用二項式展開法將輻射邊界條件展開至二階，其中一階、二階近似輻射邊界條件分別如下式表示：

1. 一階：

$$\frac{\partial \eta}{\partial n} = i\alpha k \eta \quad (2)$$

2. 二階：

$$\frac{\partial \eta}{\partial n} - i\alpha k \left(\eta + \frac{1}{2k^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial s^2} \right) = 0 \quad (3)$$

式(2)與式(3)中，當 $\alpha = 0$ 及 $\alpha = 1$ 時，分別代表全反射邊界和透過邊界，而 $0 < \alpha < 1$ 則代表部分反射邊界。

至於在外海開放邊界處，邊界上包含了入射波浪 η^i 及散射波浪 η^s ，波浪流速勢可表為 $\eta = \eta^i + \eta^s$ 。其中散射波 η^s 需滿足輻射邊界條件。

根據式(2)及式(3)，可得到外海入射邊界條件一階及二階表示式如下：

1. 一階：

$$\frac{\partial \eta}{\partial n} = \left(\frac{\partial \eta^i}{\partial n} - i\alpha k \eta^i \right) + i\alpha k \eta \quad (4)$$

2. 二階：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial n} = & \left(\frac{\partial \eta^i}{\partial n} - i\alpha k \eta^i - \frac{i\alpha}{2k} \frac{\partial^2 \eta^i}{\partial s^2} \right) \\ & + \left(i\alpha k \eta + \frac{i\alpha}{2k} \frac{\partial^2 \eta}{\partial s^2} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

上述外海入射邊界條件式(4)、式(5)中，若令 η^i 項為零，則可簡化為式(2)及式(3)。因此，本文中將以外海入射邊界條件式(4)、式(5)作為通用邊界條件，當選用的邊界條件為全反射邊界、部分反射邊界及輻射邊界條件時，只需令 η^i 為零即可。

三、數值模式

本文以有限元素法作為數值計算的方法，利用加權殘差法則以及散度定理，式(1)之緩坡方程式可寫成加權殘差式為

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} [CC_g \nabla \eta \cdot \nabla \phi_i - k^2 CC_g \eta \phi_i] dA \\ & = \int_{\partial A} CC_g \frac{\partial \eta}{\partial n} \phi_i ds \end{aligned} \quad (6)$$

式中， ϕ_i 為形狀函數。式(6)中包含計算領域 Ω 之領域積分，以及邊界 ∂A 之邊界積分兩部份。模式採用三角形元素建構數值格網，並利用二次形狀函數描述元素中各物理量 q ($q = \eta, CC_g, k^2 CC_g$ 等) 的分佈關係，即

$$q = \sum_{j=1}^N q_j \phi_j \quad (7)$$

則可得到離散化之加權殘差式如下：

$$\sum_{j=1}^N K_{ij} \eta_j = F_i \quad i = 1 \sim N \quad (8)$$

式中

$$\begin{aligned} K_{ij} = & \sum_{m=1}^N (CC_g)_m \iint_{\Omega} \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i \phi_m dA \\ & - \sum_{k=1}^N (\omega^2 n)_k \iint_{\Omega} \phi_i \phi_j \phi_k dA \end{aligned} \quad (9)$$

$$F_i = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 \quad (10)$$

$$F_1 = \int_{b_A} CC_g \frac{\partial \eta^i}{\partial n} \phi_i ds$$

$$= \sum_{j=1}^N \left[\sum_{m=1}^N (-i)(kCC_g)_m \int_{b_A} \phi_i \phi_j \phi_m ds \right] \cos(\theta^i - \theta^j) \eta_j^i \quad (11)$$

$$F_2 = \int_{b_A} (-i\alpha)kCC_g \eta^i \phi_i ds$$

$$= \sum_{j=1}^N \left[\sum_{m=1}^N (-i\alpha)(kCC_g)_m \int_{b_A} \phi_i \phi_j \phi_m ds \right] \eta_j^i \quad (12)$$

$$F_3 = \int_{b_A} -\frac{i\alpha}{2k} CC_g \frac{\partial^2 \eta^i}{\partial s^2} \phi_i ds$$

$$= \sum_{j=1}^N \left[\sum_{m=1}^N \left(\frac{i\alpha}{2}\right)(kCC_g)_m \int_{b_A} \phi_i \phi_j \phi_m ds \right] [\sin(\theta^i - \theta^j)]^2 \eta_j^i \quad (13)$$

$$F_4 = \int_{b_A} i\alpha k CC_g \eta^i \phi_i ds$$

$$= \sum_{j=1}^N \left[\sum_{m=1}^N (i\alpha)(kCC_g)_m \int_{b_A} \phi_i \phi_j \phi_m ds \right] \eta_j^i \quad (14)$$

$$F_5 = \int_{b_A} \frac{i\alpha}{2k} CC_g \frac{\partial^2 \eta^i}{\partial s^2} \phi_i ds$$

$$= \sum_{j=1}^N \left[\sum_{m=1}^N \left(\frac{i\alpha}{2}\right) \left(\frac{CC_g}{k}\right)_m \int_{b_A} \phi_m \phi_{j,ss} \phi_i ds \right] \eta_j^i \quad (15)$$

其中 θ^i 為波浪入射角度， θ^j 為邊界上法線 n 方向與 x 方向之夾角。

四、結果與討論

(一) 波浪通過等水深直立圓柱

本文選取波浪通過等水深直立圓柱的問題進行模式驗證。計算條件為波高 $H_0 = 0.053\text{m}$ ，週期 $T = 1.0\text{sec}$ ，圓柱直徑 $D = 1\text{m}$ ，水深 $h = 0.35\text{m}$ ，並選擇 0° 、 30° 、 45° 等不同的波浪入射角度分別計算一階及二階輻射邊界條件之波高分佈圖，其計算結果如圖 2~圖 4 所示。

由圖 2a~2c 可以看出波浪正向入射時，理論解(MacCamy and Fuchs, 1954)與二階輻射邊界條件所計算出之波高分佈相當接近，結果頗令人滿意；以一階輻射邊界條件計算的結果則與理論解有較大的差異。另外，當波浪入射角度為 30° 及 45° 時，圖 3b 與圖 4b 可看出利用二階輻射邊界條件所計算

出之結果，皆沿著入射波方向呈左右兩側對稱；以一階輻射邊界條件計算所得之結果(圖 3a、4a 所示)，卻可以發現波高分佈並不完全對稱於入射波方向，波高分佈在尾水端邊界時會垂直邊界的切線方向，這是由於所設定的一階輻射邊界條件是假設波浪以垂直邊界方向通過邊界所致，因而造成不合理的現象產生。二階輻射邊界條件多了一個允許波浪斜向傳遞出去的修正項，因此改善了一階輻射邊界條件所造成之不合理之現象。

圖 5~圖 7 為沿波浪入射方向中央線剖面之波高分佈圖。綜合比較結果可以看出在圓柱前端反射效應明顯之處，以一階、二階輻射邊界條件計算所得之結果均接近理論解；至於在圓柱後端遮蔽區處，由一階輻射邊界條件所計算之結果有些許的振盪現象，而二階輻射邊界條件則改善了很多，尤其是入射角度為 45° 時(圖 7)，一階輻射邊界所產生之振盪現象更是明顯，這是由於一階輻射邊界條件是讓波浪以垂直邊界方向通過邊界，使計算領域內產生多餘的反射波，所造成的誤差。

根據以上之討論，本文模式採用二階輻射邊界條件模擬波浪大角度斜向入射時，對於結構物突出水面的繞射效應之模擬，有著非常不錯之結果。

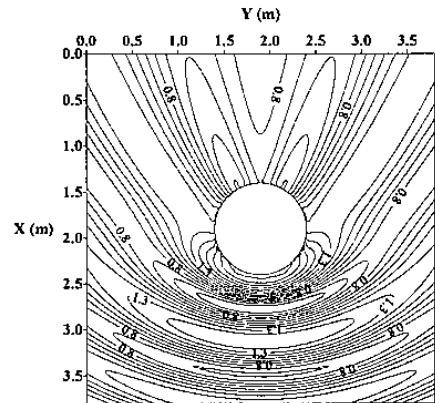


圖 2a 正向入射之波高分佈(理論解)

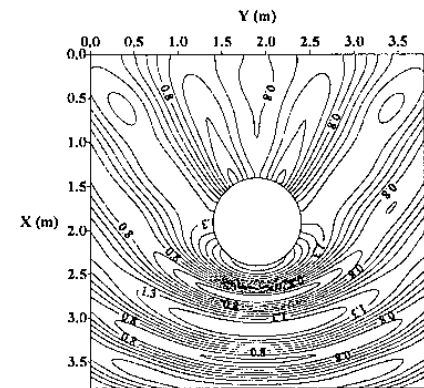


圖 2b 正向入射之波高分佈(一階輻射邊界條件)

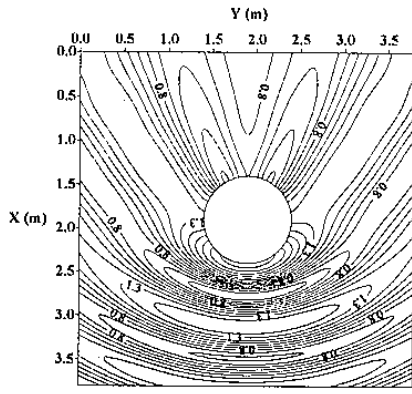


圖 2c 正向入射之波高分佈(二階輻射邊界條件)

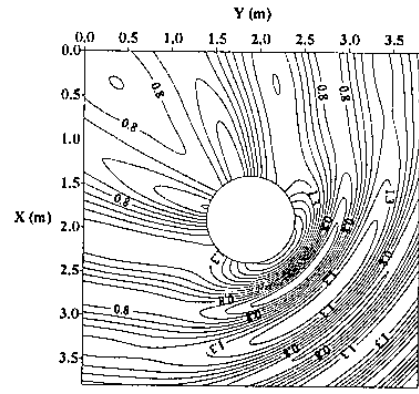


圖 4b 入射角 45 度之波高分佈(二階輻射邊界條件)

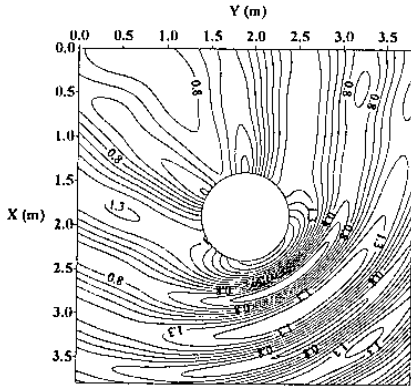


圖 3a 入射角 30 度之波高分佈(一階輻射邊界條件)

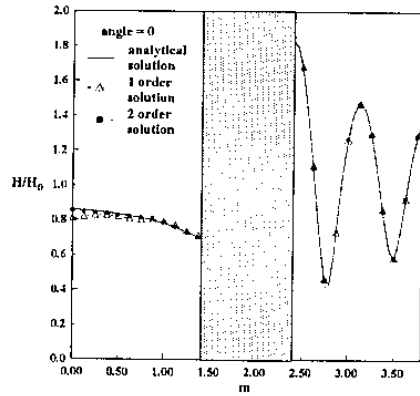


圖 5 軸向波高分佈，正向入射

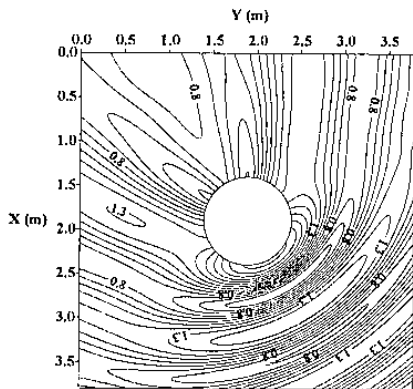


圖 3b 入射角 30 度之波高分佈(二階輻射邊界條件)

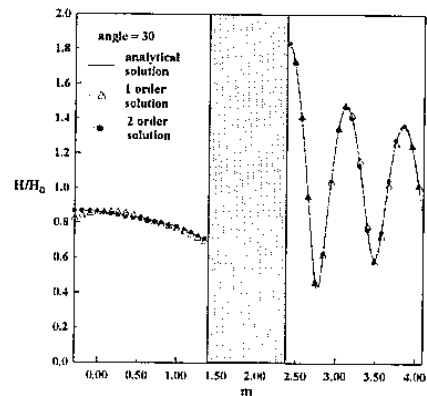


圖 6 軸向波高分佈，入射角 30 度

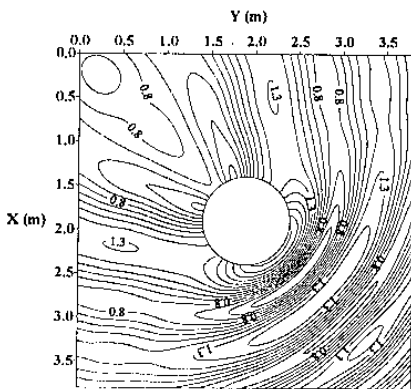


圖 4a 入射角 45 度之波高分佈(一階輻射邊界條件)

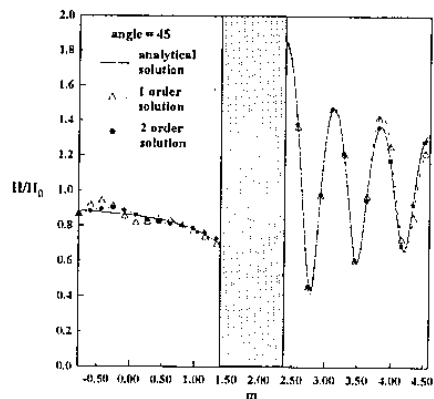


圖 7 軸向波高分佈，入射角 45 度

(二) 波浪通過半球形淺灘地形

本文選取波浪通過一半球形淺灘地形問題來驗證本模式模擬波浪之折、繞射現象。計算條件採用 Ito 和 Tanimoto (1972) 之試驗條件，其淺灘之佈置如圖 8 所示，地形水深分佈如下式所示：

$$\begin{cases} h = h_m + e_0 r^2 & \text{for } r < R \\ h = h_0 & \text{for } r \geq R \end{cases} \quad (16)$$

$$r^2 = (x' - x_m)^2 + (y - y_m)^2 \quad (17)$$

$$e_0 = (h_0 - h_m) / R^2 \quad (18)$$

其中淺灘中心頂部水深 $h_m = 0.05\text{m}$ ， $h_0 = 0.15\text{m}$ ，淺灘半徑 $R = 0.8\text{m}$ ， x_m 、 y_m 代表淺灘之圓心位置，而計算之週期 $T = 0.511\text{sec}$ ，入射波高 $H_0 = 0.0208\text{m}$ ，波長 $L_0 = 0.4\text{m}$ 。

波浪正向入射時，模式計算結果與試驗值之比較如圖 9~圖 11 所示，從圖中我們可以發現以一階及二階輻射邊界條件所計算出來之計算結果均有令人滿意的結果。

圖 12~圖 14 則為本文模式利用一階與二階邊界條件在不同入射角度時之波高分佈圖，其中左圖為一階輻射邊界計算結果，右圖則為二階輻射邊界條件計算結果。波浪正向入射時（圖 12），可以看到一階輻射邊界條件所計算出之波高分佈會有抖動的現象產生，而二階輻射邊界條件則沒有。再者，當波浪斜向入射，波浪入射角度為 30° 、 45° 時（圖 13、14 所示），一階輻射邊界條件所計算出之波高分佈已有不對稱情形，尤以 45° （圖 14 之左圖）時最為明顯，但是以二階輻射邊界條件所計算出之結果（圖 13、14 之右圖）卻相當良好，波高分佈幾乎無抖動的現象。

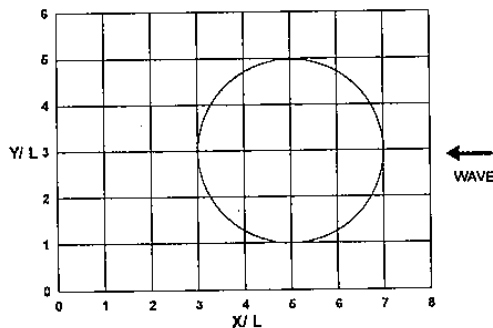


圖 8 淺灘配置圖

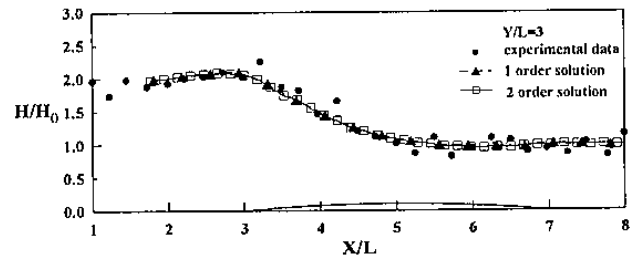


圖 9 一階、二階輻射邊界條件計算結果與試驗值之比較， $Y/L = 3$

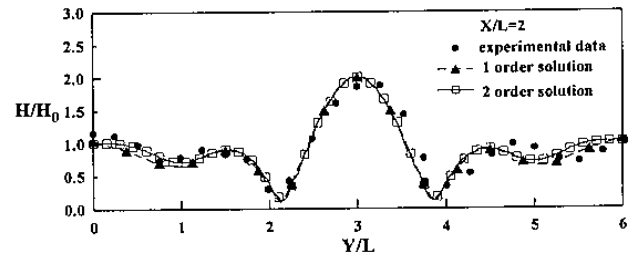


圖 10 一階、二階輻射邊界條件計算結果與試驗值之比較， $X/L = 2$

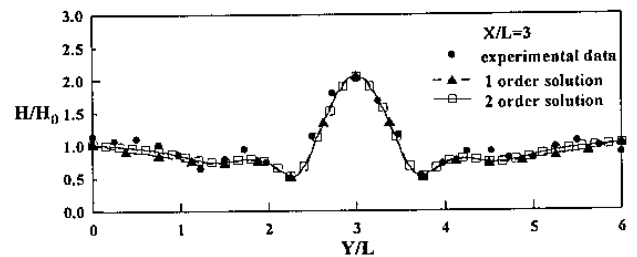


圖 11 一階、二階輻射邊界條件計算結果與試驗值之比較， $X/L = 3$

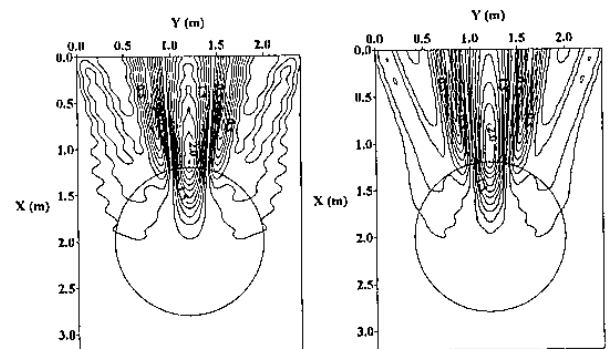


圖 12 以一階（左圖）、二階（右圖）輻射邊界條件計算之波高分佈（正向入射）

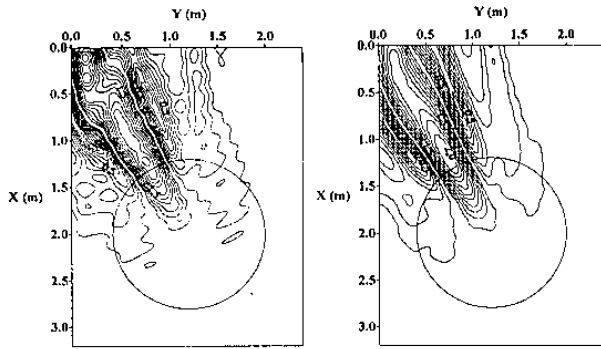


圖 13 以一階（左圖）、二階（右圖）輻射邊界條件計算之波高分佈（入射角 30 度）

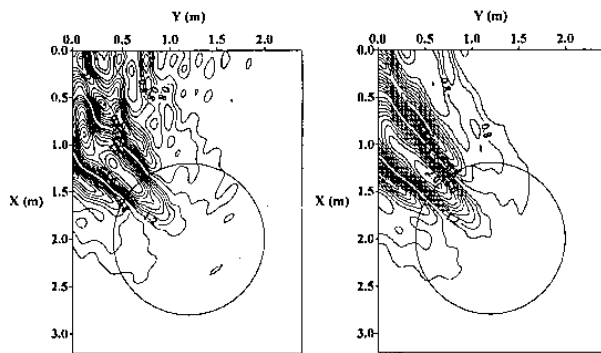


圖 14 以一階（左圖）、二階（右圖）輻射邊界條件計算之波高分佈（入射角 45 度）

五、結論

本文以有限元素法解析橢圓型態的緩坡方程式，計算波浪的折、繞、反射等效應，並以二階輻射邊界條件改善大角度波浪斜向入射問題，經驗證比較與討論後，歸納出以下幾點結論：

1. 有關波浪正向入射之問題，採用一階與二階輻射邊界條件所計算出來之結果，遠離開放邊界處其差異性並不大，但在靠近開放邊界處，二階輻射邊界條件比一階輻射邊界條件更具精確性。
2. 對於大角度波浪斜向入射問題，本文以二階輻射邊界條件來處理，確實能大幅度改善一階輻射邊界條件之缺點。
3. 本文模式對於波浪的折、繞、反射效應，以二階輻射邊界來處理，均能正確地模擬出結果。

六、參考文獻

1. Berkhoff, J.C.W., 1972: "Computation of Combined Refraction-Diffraction", Proceedings of the 13th International Conference on Coastal Engineering, 471-490.

2. Bettess, P. and O.C. Zienkiewicz, 1977: "Diffraction and Refraction of Surface Waves Using Finite and Infinite Element", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 11, 1271-1290.
3. Booij, N., 1981: "Gravity Waves on Water with Non-uniform Depth and Current", Delft University of Technology, Department of Civil Engineering, Report No. 81-1.
4. Chen, H.S. and C.C. Mei, 1974: "Oscillation and Wave Force on an Offshore Harbor", Ralph M. Parsons Laboratory, Massachusetts Institute of Technology, Report No. 190.
5. Dingemans, M.W., 1983: "Verification of Numerical Wave Propagation Method with Field Measurements: CREDIZ Verification Haringvliet", Rep W488, pt. 1, Delft Hydraulic Laboratory, Delft.
6. Hsu, T. W. and C. C. Wen, 1997: "On the Parabolic Approximation for Water Wave Transformations", Proceedings of the 19th Ocean Engineering Conference in R.O.C., 97-104.
7. Ito, Y. and K. Tanimoto, 1972: "A Method of Numerical Analysis of Wave Propagation Application to Wave Diffraction and Refraction", Proceedings of the 13th International Conference on Coastal Engineering, 503-522.
8. Kirby, J.T., 1986: "Rational Approximations in the Parabolic Equation Method for Water Waves", Coastal Engineering, 10, 503-522.
9. MacCamy, R.C. and R.A. Fuchs, 1954: "Wave Force on Piles: a Diffraction Theory", Institute of Engineering Research, Waves Investigation Laboratory, Serier 3, Issue 334, Berkeley California.
10. Radder, A.C., 1979: "On the Parabolic Equation Method for Water Wave Propagation", Journal of Fluid Mechanics, 95, 159-176.
11. 陳伯旭, 蔡丁貴, 1990: "局部輻射邊界條件在水波數值模式上之應用", 第十二屆海洋工程研討會論文集, 1-9.
12. 蘇青和, 1993: "多孔消波體波能消散解析及其應用於港池之研究", 國立成功大學水利及海洋工程研究所博士論文.
13. 許泰文, 蔡丁貴, 顏朝卿, 陳伯旭, 1998: "以有限元素法模擬近岸波場", 第二十屆海洋工程研討會論文集, 491-499.