

台灣海域暴潮模擬之數值正交網格產生

黃永德 王鄭翰 蔡丁貴
台大土木工程學系

摘 要

本文發展的區域數值轉換模式，是先以複變映射(Complex mapping)將不規則區域轉換成「標準區域」，再以邊界積分元素法(Boundary integral element method)將標準區域轉換成矩形區域，在矩形區域中建立網格。經邊界元素積分法與複變反轉換轉回原不規則區域，而在不規則區域中形成網格。利用此網格系統可產生複連通區域的網格，

本文以台灣環島鄰近水域為範圍建立網格，作為台灣暴潮模擬網格建立的初步工作。

一、前言

在暴潮計算中，其主要涵蓋二個部份，一是風場計算，一是流體動力計算，而在後者中，計算區域的選定與邊界條件的處理常是影響計算準確與否的關鍵。

邊界包含自然與人為邊界，後者為人為劃定以便計算之需。而在暴潮演算的前處理中，放置計算網格時便會遭遇到如何處理自然邊界與人為邊界的問題。

FEMA 模式以矩形對角線逼近自然邊界，SLOSH 模式(C.P. Jelesnianski, etc.)以極座標網格逼近自然邊界，但都會產生相當的數值誤差。本文所提的邊界符合正交座標系統，則能更真實地逼近自然邊界，來減少計算上的誤差。且此法可根據幾何形狀需要產生不同密度的網格，兼顧計算效率與準確性。

另外，當處理人為邊界時，FEMA 模式的做法是將人為邊界擴大到不致影響計算準確性的地方為止，並且利用粗網格疊加細網格計算的方式來減少計算經費及時間。然而在延伸人為邊界至大陸棚外的深海時，常因大陸棚蜿蜒地形之需要而使用過多之細網格，且細網格與粗網格的疊交處理不易。若是運用符合正交座標系統，將可完全沿大陸棚建立網格系統而避免此一問題。由於採用以往之方法網格建立不易，且網格產生後皆不易測試網格大小對數值計算之收斂性。本文的方法，因座標轉換後再產生網格，對於不同大小之網格，可以快速產生，不受限制。

本文利用保角轉換 [Conformal mapping] 與邊界積分法做為基礎，在邊界積分元素法上，1983 年的 Liggett 與 Liu 利用邊界元素積分 (BIEM) 解統御方程—拉普拉斯方程式 (Laplace equation)，以求得區域之邊界物理量及其偏導數，再用已知的邊界條件求得區域內部之物理量與其偏導數值。

到 1985 年的 Thompson、Mastin 及 Warsi 則利用保角轉換 [Conformal mapping]，將一個四個頂角均為 90 度且四個邊均為平滑曲線之封閉區域轉換成一矩形區域，並利用柯西里曼條件解橢圓形之偏

微分方程式形成網格，再利用反轉換而得到不規則區域上之網格。

1989 年 Tsay 運用邊界元素積分法 (IEM) 在特定的不規則區域中形成網格，建立起一網格自動形成模式，且建立邊界符合座標系統，以簡化原不規則區域之複雜計算。1993 年賴俊達以 Tsay 之網格自動形成模式，應用於以有限元素法 (FEM) 計算污染物之傳輸之網格切割前置處理。1997 年 Tsay 及 Hsu 利用複變映射理論中的保角映射，將 Tsay(1989)原本受限於特定區域之網格產生法推廣至任何不規則區域，且提升其精度應用於二維之熱傳導問題。

本文係承襲 Tsay(1989)與 Tsay 及 Hsu(1997)之研究而加以發展並改善使其功能更趨完善，能快速在複雜不規則之區域產生網格，以做為有限差分及有限元素計算之前置作業。

二、區域數值轉換

任意形狀之封閉區域均可先選取四個頂角點後，利用複數轉換 [Complex mapping] 使其轉換成一標準區域 [四頂角為直角、四邊為平滑曲線]。如圖-1， W 複數平面中夾角為 α 之區域轉換到 Z 複數平面中夾角為 β 之區域：

$$\frac{dZ}{dW} = (W - W_0)^{A-1} \quad (1)$$

將(1)式積分得

$$Z - Z_0 = \frac{\alpha}{\beta} (W - W_0)^A \quad (2)$$

其中

W_0 ：原複數平面 (W 平面) 支點

Z_0 ：即將轉換成之複數平面 (Z 平面) 支點

$$A = \frac{\alpha}{\beta}$$

因此每次轉換的該支點，轉換到新的複數平面 (Z 平面) 均成為新複數平面之原點。另外由於 $(W - W_0)^{\frac{\beta}{\alpha}}$ 為一多值函數，因此為保持每一次的轉換

均為一對一的單值轉換，必須設定一支線〔 Branch line 〕或分支切割〔 Branch cut 〕，而 W_0 即為其支點，還有一點值得一提的，所選取的分支切割必須在轉換的區域之外，方能確保該轉換區域的連續。保角轉換中座標系統之偏導數在物理數值計算中是重要之資料，(2)中若令

$$Z = X + iY$$

$$Z_0 = X_0 + iY_0$$

$$W = \zeta + i\eta$$

$$W_0 = \zeta_0 + i\eta_0$$

則(2)式可改寫成：

$$(\zeta - \zeta_0) + i(\eta - \eta_0) = \left\{ A \left[(X - X_0) + i(Y - Y_0) \right] \right\}^{\frac{1}{A}} \quad (3)$$

將(3)式對 X 、 Y 微分：

$$\Rightarrow \frac{\partial \zeta}{\partial X} + i \frac{\partial \eta}{\partial X} = \left\{ A \left[(X - X_0) + i(Y - Y_0) \right] \right\}^{\frac{1}{A} - 1} \quad (4)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \zeta}{\partial Y} + i \frac{\partial \eta}{\partial Y} = i \left\{ A \left[(X - X_0) + i(Y - Y_0) \right] \right\}^{\frac{1}{A} - 1} \quad (5)$$

因此轉換至新平面時，可得

$$\frac{\partial \zeta}{\partial X} = \frac{\partial \eta}{\partial Y}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial Y} = -\frac{\partial \eta}{\partial X} \quad (6)$$

由式(6)可證明轉換後之偏導數符合柯西里曼條件〔 Cauchy-Riemann condition 〕，同時也滿足拉普拉斯方程式，使原複數平面 ($X - Y$) 之標準區域，轉換至另一複數平面 ($\zeta - \eta$) 之矩形區域。其方法如下： X 、 Y 可視為 ζ 、 η 的變數，可表成

$$X = X(\zeta, \eta), Y = Y(\zeta, \eta) \quad (7)$$

同理， ζ 、 η 亦可視為 X 、 Y 之函數

$$\zeta = \zeta(X, Y), \eta = \eta(X, Y) \quad (8)$$

考慮點的連續性，因此我們由高斯散度定理出發：

$$\int_D (\nabla \cdot \phi) ds = \int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \vec{n} ds \quad (9)$$

其中

∇ ：向量操作符號〔 $\nabla = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ 〕

ϕ ：任何可微分的向量

D ：表示面積分

Ω ：表示線積分

n ：封閉區域邊界上向外之單位法向量

首先將 ϕ 定義成 $U\nabla V$ ，而 U 、 V 是兩個可微分的任何函數，將 $\phi = U\nabla V$ 代入(9)式減去將 $\phi = V\nabla U$ 代入(9)式：

$$\int_D (U\nabla^2 V - V\nabla^2 U) ds = \int_{\Omega} (U\nabla V - V\nabla U) \cdot \vec{n} dA \quad (10)$$

$$\because \nabla V \cdot \vec{n} = \frac{\partial V}{\partial n}, \quad \nabla U \cdot \vec{n} = \frac{\partial U}{\partial n}$$

$$\int_D (U\nabla^2 V - V\nabla^2 U) ds = \int_{\Omega} \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) dA \quad (11)$$

若函數 U 與 V 均滿足拉普拉斯方程式 $\nabla^2 U = \nabla^2 V = 0$ ，則(11)可化成

$$\int_{\Omega} \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) dA = 0 \quad (12)$$

利用二維拉普拉斯方程式的基本解 $\ln r$ 〔 Free space Green's function 〕：

$$\phi = \ln r \quad (13)$$

其中 r 是奇異點到其他邊界點的距離。將(13)式代入(12)式得：

$$2\pi\phi(p) = \int_{\Gamma} \left[\phi(q) \frac{\partial(\ln r)}{\partial n} - \ln r \frac{\partial\phi(q)}{\partial n} \right] ds \quad (14)$$

Γ ：封閉區域之邊界圍線

同理，若奇異點位於邊界上，則

$$\alpha\phi(p) = \int_{\Gamma} \left(\frac{\phi}{r} \frac{\partial r}{\partial n} - \ln r \frac{\partial\phi}{\partial n} \right) ds \quad (15)$$

由於將標準區域轉換至矩形區域時亦為保角之轉換，因此轉換至矩形區域後之 ξ 、 η 函數滿足拉普拉斯方程式，所以在標準區域上解拉普拉斯方程式〔利用(15)式〔邊界積分方程式〕求解〕，因此：

$$\alpha\xi(p) = \int_{\Gamma} \left[\xi \frac{\partial(\ln r)}{\partial n} - \ln r \frac{\partial\xi}{\partial n} \right] ds \quad (16)$$

$$\alpha\eta(p) = \int_{\Gamma} \left[\eta \frac{\partial(\ln r)}{\partial n} - \ln r \frac{\partial\eta}{\partial n} \right] ds \quad (17)$$

其中

ds ：沿邊界之微小線段

r ：區域內或邊界上一奇異點 P 至邊界 Γ 之距離

$$r = \left[(X - X_p)^2 + (Y - Y_p)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (18)$$

接下來我們要解(16)式與(17)式, 求出標準區域上各邊界點所對應至矩形區域邊界上之座標值或法向導數值 (即 ξ 、 η 或 $\frac{\partial \xi}{\partial n}$ 、 $\frac{\partial \eta}{\partial n}$)。

再來說明如何用數值方法去求解, 首先我們將標準區域邊界做適度的離散, 離散成 N 條線段來模擬邊界, 使邊界成爲一維的線性元素, 亦即邊界嵌合。表示如下:

$$X = \sum \varphi_i X_i \quad (19)$$

$$Y = \sum \varphi_i Y_i \quad (20)$$

φ_i : 表示線性內差函數

X_i 、 Y_i : 表示邊界上節點座標值

解積分方程式即是求解積分方程中的未知函數, 我們用以上邊界離散觀念來離散方程式中的函數如下:

$$\xi^e = \sum \varphi_i^e \xi_i^e \quad (21)$$

$$\eta^e = \sum \varphi_i^e \eta_i^e \quad (22)$$

$$\frac{\partial \xi^e}{\partial n} = \sum \varphi_i^e \left(\frac{\partial \xi}{\partial n} \right)_i^e \quad (23)$$

$$\frac{\partial \eta^e}{\partial n} = \sum \varphi_i^e \left(\frac{\partial \eta}{\partial n} \right)_i^e \quad (24)$$

其中 φ_i^e : 元素內插函數且爲線性元素

ξ_i^e 、 η_i^e : 元素節點物理量

在 2 節中利用已知的條件代入(23)式與(24)式, 解得矩形平面之 ξ 、 η 值。而雖然矩形區域邊界上所有點對應於標準區域之 X 、 Y 值皆已知, 但所對應於標準區域上邊界點之法向導數 $\frac{\partial X}{\partial n}$ 、 $\frac{\partial Y}{\partial n}$ 值皆未知, 因此以邊界積分元素法解拉普拉斯方程式, 解出邊界上所有點所對應之法向導數值。但須注意的是, 在矩形區域的四個角落具有多重方向導數, 因此可利用柯西里曼條件增加四條方程式, 即可求得四個角落點之另一方向導數 ($\left(\frac{\partial X}{\partial n} \right)'$ 、 $\left(\frac{\partial Y}{\partial n} \right)'$)。

再利利用已知之矩形區域邊界上之座標值與偏導數代入式(23)與式(24), 做反轉換至標準區域, 而在標準區域中建立網格。以順利定義該四點。

$$2\pi Y(P) = \int_{\Gamma} \left(\frac{Y}{r} \frac{\partial}{\partial n} - \ln r \frac{\partial Y}{\partial n} \right) ds \quad (25)$$

$$2\pi Y(P) = \int_{\Gamma} \left(\frac{Y}{r} \frac{\partial}{\partial n} - \ln r \frac{\partial Y}{\partial n} \right) ds \quad (26)$$

其中 P : 區域內部點

r : 內部點與邊界點之距離

$$r = \left[(\xi - \xi_p)^2 + (\eta - \eta_p)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

再利用(2)式將標準區域之網格點反轉換, 即可成功的在原區域內建立網格。

三、複連通區域正交網格之形成

如圖 2 之兩同心圓, 由 a 點出發至點做第一條切線, 逆時鐘方向沿外圓邊界回到 c 點, 再由 c 點出發回到 d 點做第二條切線(切線 ab 與切線 cd 的距離精度可逼近至 10^{-4})。將此同心圓切割成以 a, b, c, d 四點爲頂點, 線段 ab, bc, cd, da 爲其邊界之單連通區域, 再應用之前的理論基礎將此一單連通區域轉換至矩形區域形成網格(如圖 2), 再將矩形區域上的網格轉換到原同心圓區域, 形成我們所需要的網格(圖 3)。以此同心圓爲例, 網格點數爲 40×10 , 計算所花費的 cpu 時間在一般 $pc586$, $pentium133$ 約爲 30 秒。使用者可視需要再細分網格點。

另外一例爲台灣海峽區域網格點的形成。不規則區域內台灣環島邊界之量測點數爲 239, 外圓則爲半圓弧接駁中國沿岸, 量測點數爲 481(圖 4), 自花蓮和台東之間沿岸點 a 出發做第一條切線逆時針沿半圓弧及大陸沿海進行, 最後回到 c 點做第二條切線回到 d 點(見圖 4)。轉換到矩形區域後細分爲 100×20 個點, 最後再轉回原來的不規則區域(圖 5)。所使用的 CPU 時間約爲 7 分鐘。

四、參考文獻

1. Liggett, J.A., and Liu P.L-F., 1983: The boundary integral equation for porous media flow, Chapter 2, Allen & Unwin Inc., 9 Winchester Terrace, Winchester, Mass 01890. USA, 17-33
2. Jelesnianski, C.P., Jye Chen and Wilson A.S., 1992: SLOSH: Sea, lake, and overland surges from hurricanes, Chapter 5, NOAA Technical Report NWS 48, 15-17.
3. Thompson J.F., Warsi, Z.U.Z., and astin, C.W., 1985: Numerical grid generation: Foundations and applications, North Holland, New York.
4. Tsay, T.K., Yeh, G.T., and Toran, L.E., 1990: GRIDMAKER: a grid generator for two- and three-dimensional finite element subsurface flow models.

Oak Ridge National Laboratory, Tennessee.

5. Tsay, T.K., Ebersole, B.A., and Liu, P.L.F., 1989: "Numerical modelling of wave propagation using parabolic approximation with a boundary-fitted coordinate system.", *International Journal for Numerical Methods Engineering* 27, 37-55.
6. Ting-Kuei Tsay and Fu-Seng Hsu, 1997: "numerical Grid Generation of an irregular region.", *International Journal for Numerical Methods Engineering* 40, 343-356.

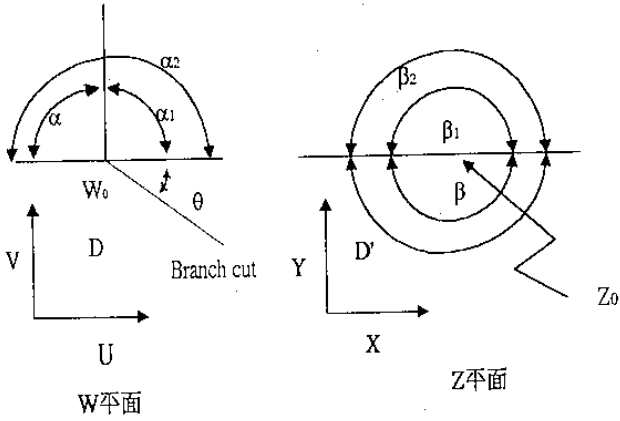


圖 1. W 平面夾角 α 轉換至 Z 平面夾角 β

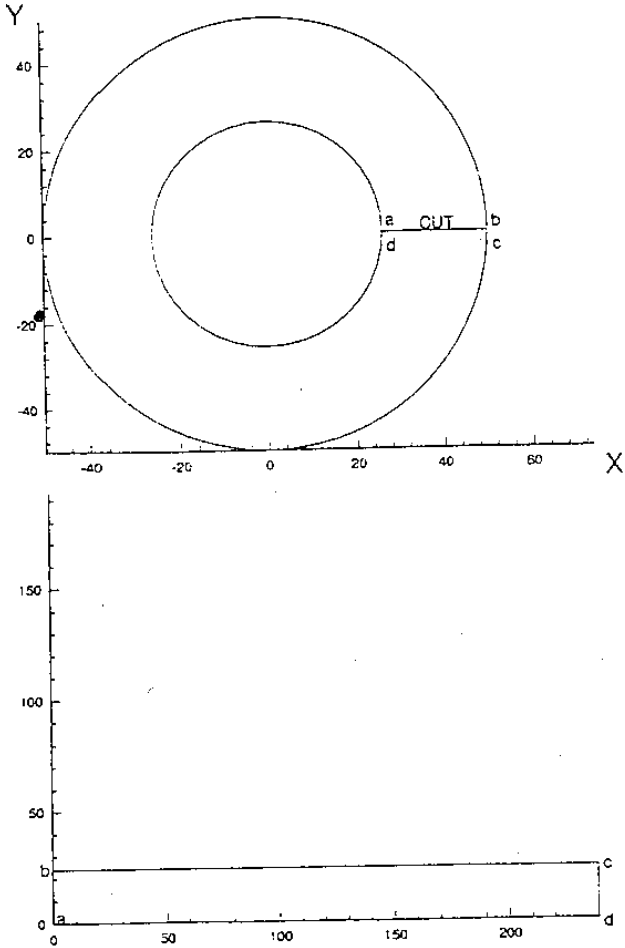


圖 2. 二同心圓複連通區域與矩形之轉換

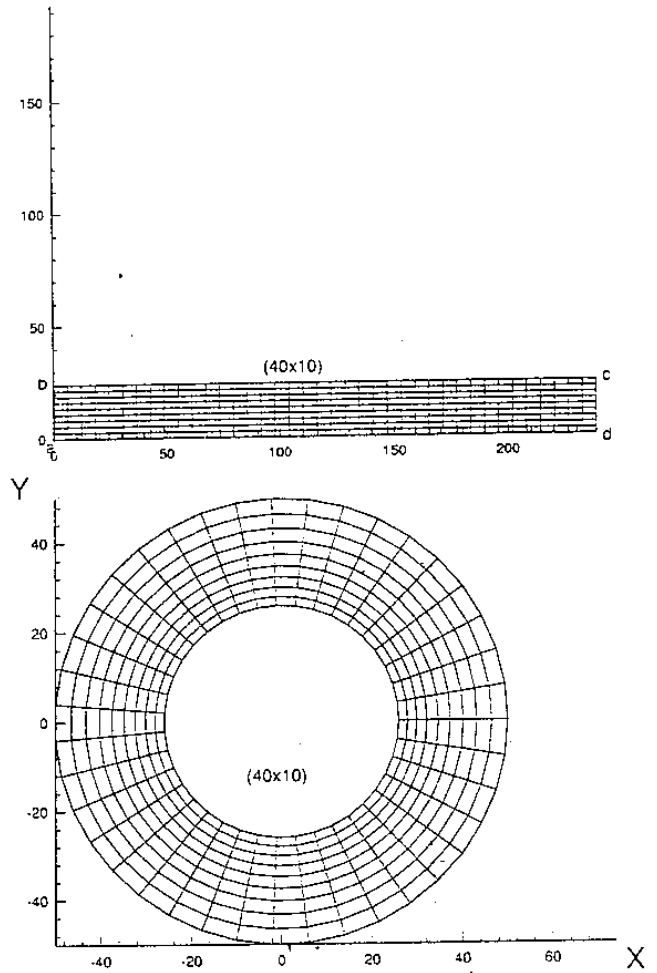


圖 3. 矩形網格反轉換至二同心圓區域

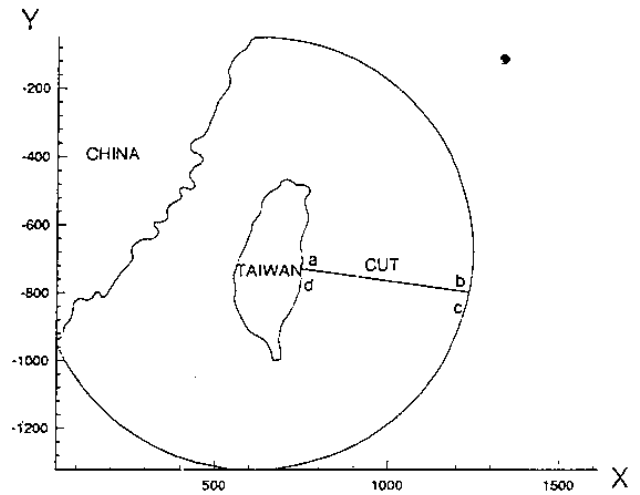


圖 4. 將台灣海域切割成 ab, bc, cd, da 四邊界的單連通區域

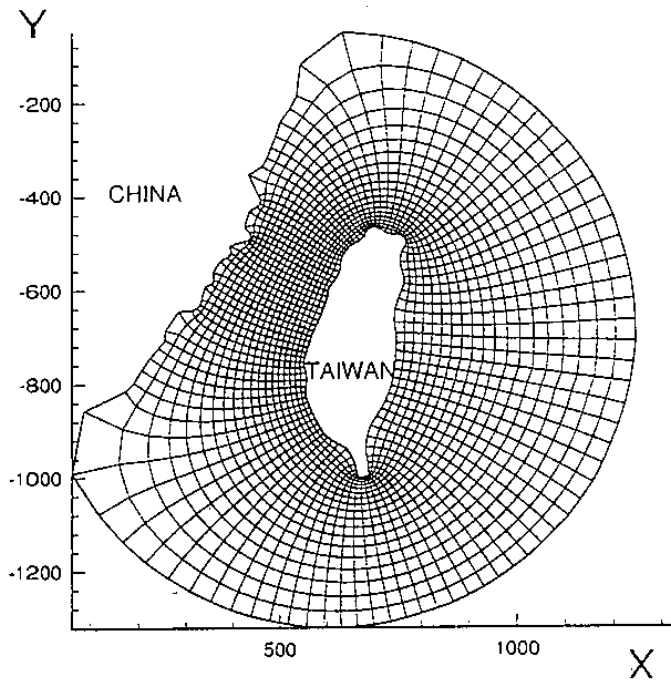


圖 5. 生成台灣海峽區域網格點

Numerical generation of boundary-fitted orthogonal grids for storm surge simulation around Taiwan

W.T. Huang¹ J. Wang² T.K. Tsay³

National Taiwan University Civil Engineering

Abstract

The numerical mapping of a region is developed by adopting complex mapping to transform an irregular region into a "standard region". The boundary integral element method is applied to transform numerically the standard region into a rectangular region. Finally, by inverse transformation, grids can be successfully generated within the irregular region. The grid system is boundary-fitted and orthogonal and can be applied to multi-connective regions.

Grids for water around Taiwan is generated. This is the first step for storm surge simulation around Taiwan.

1. Graduate student, Department of Civil Engineering, Taiwan University, Taipei, Taiwan.

2. Graduate student, Department of Civil Engineering, Taiwan University, Taipei, Taiwan.

3. Professor, Department of Civil Engineering, Taiwan University, Taipei, Taiwan.