

反共振理論應用於建築內非結構物的防震措施

Antiresonance Theory Applied on the Seismic Protection Method of Nonstructural Elements in Buildings

練乃齊 姚昭智
 博士研究生 副教授
 國立成功大學建築研究所

摘要

在模態分析的方法中，利用結構的頻率反應函數進行系統識別，以尋找結構物的自然共振頻率是大家所熟悉的。但頻率反應函數除了可以反應出結構的共振頻率外，亦有結構反應為零時的頻率，稱之為反共振頻率。本文將探討如何計算結構的反共振頻率，及其於非結構物防震上之適用性。在反共振頻率的理論推導過程中可知其與輸入的外力有關，因此各自由度間雖會有相同的自然共振頻率，但其反共振頻率各不相同。在非結構物的防震措施方面，若將非結構物支承系統的自然共振頻率調整與結構的反共振頻率相同時，經由樓板反應譜的計算證實，確可使非結構物的反應產生局部最小值，亦表示其可達到防震的目的。

一、前言

1971年美國加州San Fernando地震造成Slymar地區電話公司GTE通訊設備嚴重的破壞，損失約450萬美金[1]。1995年日本神戶地震造成神戶市內諸多文化財產的破壞，其損失則無法估計[2]。目前建築物內的各類設備物或博物館所展示的各種歷史文物，在固定時對防震方面的考慮十分欠缺，較新的防震措施是於設備物或展示臺的底部放置制震器[3]。但由於制震器的費用昂貴，並不適用於所有非結構物的防震設計上。因此如何發展新的防震方法，以能普及所有非結構物的防震設計上，已是目前急需研究的課題。

在模態分析的方法中，利用結構的頻率反應函數(Frequency Response Function, FRF)進行系統識別，以尋找結構物的自然共振頻率是大家所熟悉且有廣泛的討論。但頻率反應函數除了可以反應出結構的共振頻率外，亦可以表現出結構反應為零時的頻率，即反共振頻率(Antiresonance Frequency)。反共振頻率的應用，在機械設計[4]及機械控制[5]方面已有成功的實例，但在土木建築方面卻並無發展。本文將探討如何計算結構的反共振頻率，及其於非結構物防震上之適用性。經分析顯示，反共振理論於非結構物防震方面可提供確實的效果。

二、反共振理論

對於一般 n 個自由度的動力系統而言，其運動方程式（忽略阻尼作用）為

$$([K] - \Omega^2[M])\{X\} = \{F(\Omega)\} \quad (1)$$

此式 $[K]$ 、 $[M]$ 分別代表 $n \times n$ 的剛度及質量矩陣，而

$\{X\}$ 、 $\{F(\Omega)\}$ 為 $n \times 1$ 的位移及外力陣列，若將(1)式前乘 $([K] - \Omega^2[M])$ 的反矩陣，則

$$\{X\} = ([K] - \Omega^2[M])^{-1}\{F(\Omega)\} \quad (2)$$

式(2)可表示為

$$\{X\} = \frac{adj([K] - \Omega^2[M])\{F(\Omega)\}}{\det([K] - \Omega^2[M])} \quad (3)$$

此式 $\det([K] - \Omega^2[M])$ 為 $([K] - \Omega^2[M])$ 的行列式， $adj([K] - \Omega^2[M])$ 為 $([K] - \Omega^2[M])$ 的餘矩陣，可為

$$adj([K] - \Omega^2[M]) = \begin{bmatrix} b_{11}(\Omega^2) & \cdots & b_{1n}(\Omega^2) \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1}(\Omega^2) & \cdots & b_{nn}(\Omega^2) \end{bmatrix} \quad (4)$$

考慮 j 點的位移反應 X_j ，當此動力系統之反應為零時，由式(3)及式(4)可得

$$X_j = \sum_{i=1}^n b_{ji}(\Omega^2)F_i = 0 \quad (5)$$

若

$$([K] - \Omega^2[M]) = \begin{bmatrix} a_{11}(\Omega^2) & \cdots & a_{1n}(\Omega^2) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(\Omega^2) & \cdots & a_{nn}(\Omega^2) \end{bmatrix} \quad (6)$$

則 $b_{ji}(\Omega^2)$ 可表示為

$$\det \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} (-1)^{j+i} \quad (7)$$

即將 $([K] - \Omega^2[M])$ 矩陣中第 i 列及第 j 行的元素消去後求其行列式並乘以 $(-1)^{i+j}$ 。因為餘矩陣，故矩陣大小為 $(n-1) \times (n-1)$ 。則對應 $X_j = 0$ 之反共振頻率 $\{\Gamma_j\}$ 可經由式(5)得之。

由此可知，當欲得第 j 個自由度的反共振頻率時，可將 $([K] - \Omega^2[M])$ 矩陣中第 j 行的元素消去，並由第一行到第 n 列以逐步消去的方式求其個別行列式，再分別乘上所對應的外力函數，最後將所有行列式總加，並令此方程式為零加以求解，即可求得第 j 個自由度的反共振頻率，因為 $(n-1)$ 階之多項式，故共有 $(n-1)$ 個解。

三、反共振頻率實例分析

本文模擬一五層樓建築物，結構物尺寸及柱、樑斷面如文獻[6]所述。分析時將模型模擬為剪力房屋，以簡化自由度及模態分析時所需時間。所謂剪力房屋，即為樓板在水平斷面上不會產生轉角的建築結構。此五層剪力房屋經模態分析進行系統識別後，可得建築物的自然共振頻率，如表一所示。

表一、五層剪力房屋自然共振頻率表

自然共振頻率(Hz)				
1st	2nd	3rd	4th	5th
1.85	5.37	8.38	10.63	11.96

當剪力房屋受到水平地震力(地表加速度 \ddot{x}_g)作用時，其運動方程式可表示為

$$[M]\ddot{X} + [C]\dot{X} + [K]X = -[M]\{1\}\ddot{x}_g \quad (8)$$

此式中 $\{1\}$ 為所有元素均為 1 的行陣列，此陣列表示在結構物基底有一單位的水平靜態位移時，直接造成所有自由度亦有一單位位移，稱為靜態-位移向量。而 \ddot{x}_g 為水平地表加速度。

由式(8)及式(5)可得知此一五層剪力房屋第 j 層反共振點的控制方程式為

$$\sum_{i=1}^5 -m_i \cdot b_{ji}(\Omega^2) = 0 \quad (9)$$

式中 m_i 為第 i 層的質量。經式(9)之計算可得此剪力房屋各層的反共振頻率，如表二所示。

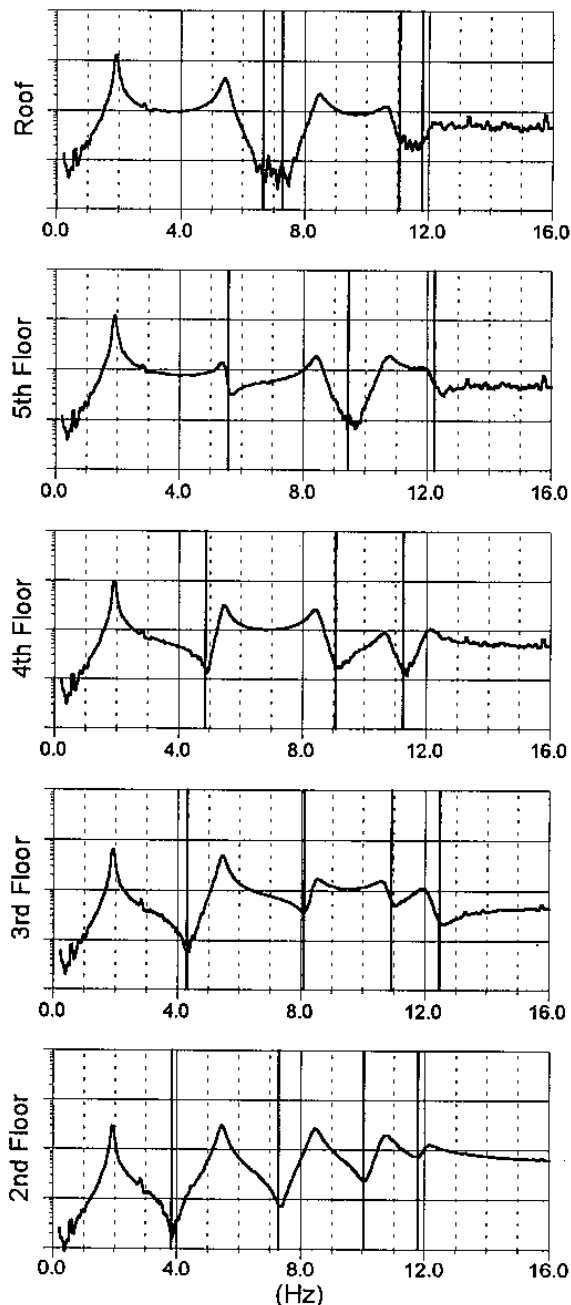
表二、五層剪力房屋各層反共振頻率表

樓層	反共振頻率(Hz)			
Roof	6.69	7.28	11.06	11.78
5F	5.57	9.45	12.22	----
4F	4.86	9.06	11.25	----
3F	4.31	8.09	10.90	12.47
2F	3.83	7.28	10.02	11.78

由式(5)可知，反共振頻率與輸入外力有關，故所得之反共振頻率與自然共振頻率的特性不同，在各樓

層是完全獨立，會有各自不同的頻率值。表二中，第5及第4樓層均各只得到3個反共振頻率，由於反共振頻率為 $(n-1)$ 階多項式的解，可能發生重根或複數根的現象，因此其解的個數至多為 $(n-1)$ 個，亦或小於 $(n-1)$ 個。

利用白噪聲(White Noise)為輸入外力，以水平地表加速度的方式作用於模型基底進行系統識別，假設阻尼比為2%，可得各樓層之頻率反應函數，如圖一所示。



圖一、五層剪力房屋各樓層頻率反應函數

反共振頻率參照表二以粗黑直線平行Y軸繪於各樓層的頻率反應函數中。由圖中可知，在各樓層的頻率反應函數中，反應最大處為各樓層共振頻率所在，而反應最小處即為反共振頻率之所在。

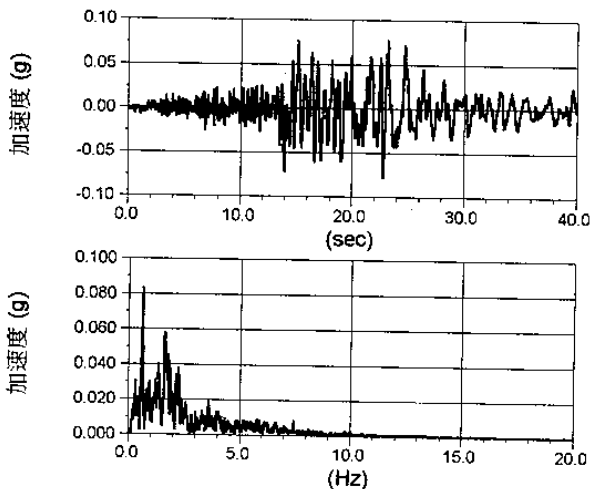
四、非結構物防震措施

非結構物的另一防震觀念，在於減低非結構物在地震作用時的振動量，振動量愈小，則物體愈不容易破壞。一般建築物內的非結構物，若為設備物或博物館內的展示臺，大都是放置在樓板之上，若為懸吊天花系統及設備管線則是固定於樓板之下，因此其於地震作用時所受之地震力都是經由樓板所傳遞。今若考慮某一非結構物於地震時的動力行為，則可將之視為一單一自由度系統，而其所受外力則為樓板反應的歷時記錄。

此時設計師可以調整非結構物支承系統的剛度，以使非結構物在地震作用時反應最小，以達防震的目的。欲求非結構物支承系統之最佳剛度時，因已將此支承系統視為一單一自由度之動力系統，故可以地震作用時之樓層歷時記錄作為輸入外力，作用於此單一自由度系統而求其最大反應，此與樓板反應譜的製作過程相同。只是過去樓板反應譜之應用在於求出樓層於何頻率時反應最大，做為結構設計時極限強度的指標，而現在則在尋找樓層於何頻率時反應最小，以做為非結構物支承系統之頻率。

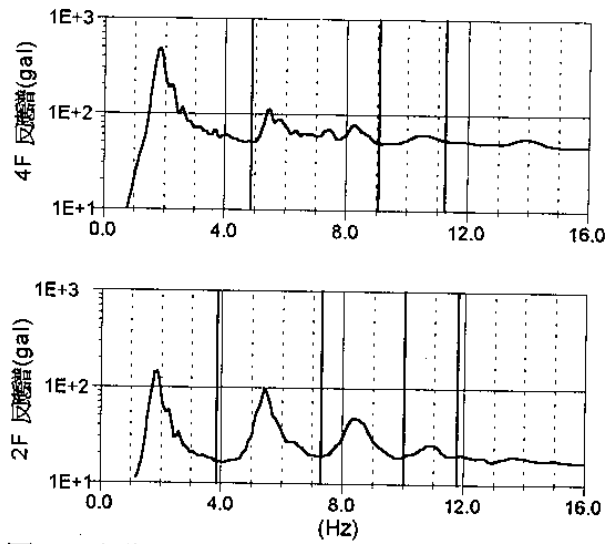
今選擇台灣地區兩筆地震記錄做為輸入之地表加速度，先計算此兩地震作用時上述五層樓剪力房屋各樓層的歷時加速度記錄，然後以各樓層的歷時加速度記錄製作2%阻尼之樓板反應譜。

第一筆為台北盆地之地震歷時記錄，地震歷時約40秒，PGA約為82gal，作用的頻寬約在0.5Hz-5.0Hz，如圖二所示。



圖二、台北盆地地表加速度歷時記錄及頻譜

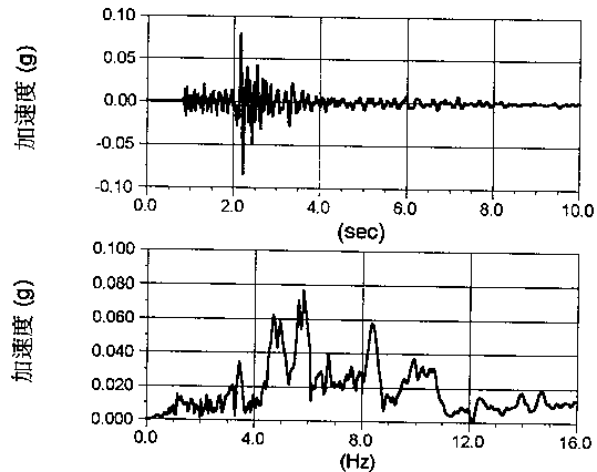
圖三為五層剪力房屋於台北盆地地震作用下第四層樓與第二層樓之樓板反應譜。



圖三、台北地震時第四層樓與第二層樓樓板反應譜

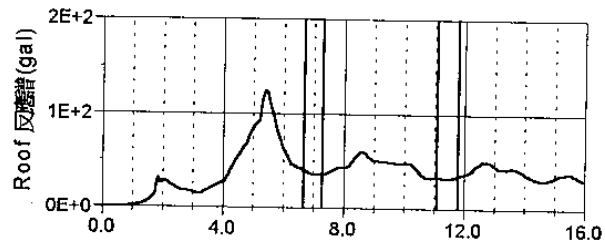
由圖三所示，各樓層樓板反應譜之局部最小值均位於該樓層之反共振頻率(黑粗實線)上，可知當非結構物支承系統的自振頻率正好等於樓板的反共振頻率時，非結構物的反應會產生局部最小值。

第二筆為台東地區之地震歷時記錄，地震歷時約10秒，PGA約為75gal，作用的頻寬約在3.5Hz-11.0Hz，如圖四所示。

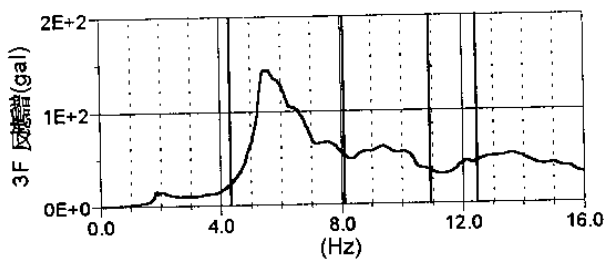


圖四、台東地區地表加速度歷時記錄及頻譜

圖五為五層剪力房屋於台東地區地震作用下屋頂層與第三樓之樓板反應譜。



圖五a、台東地區地震時屋頂層樓板反應譜



圖五b、台東地區地震時第三層樓樓板反應譜

由圖五所示，各樓層之樓板反應譜其局部最小值亦位於該樓層之反共振頻率(黑粗實線)上。

由上述的結果可知，當非結構支承系統的自然共振頻率正好等於樓板的反共振頻率時，非結構物的反應會產生局部最小值。以此做為非結構物防震措施的考慮依據，則可使非結構物得到不錯的防震效果。

五、結論

本文中將反共振理論應用於建築非結構物的防震措施上。在反共振頻率的理論推導過程中可知其與輸入的外力有關，因此各自由度間雖會有相同的自然共振頻率，但其反共振頻率各不相同。在非結構物的防震措施方面，若將非結構物支承系統的自然共振頻率調整至與結構的反共振頻率相同時，經由樓板反應譜的計算證實，確可使非結構物的反應為頻率反應函數上的局部最小值，亦表示其可降低因地震造成破壞的危害度。

參考文獻

1. Washington, D.C., U.S. Department of Commerce, 1973: National Oceanic and Atmospheric Administration, San Fernando Earthquake of February 9, 1971, Vol. 2.
2. 全國美術館會議事務所, 1995: 阪神大震災美術館博物館總合調查, 全國美術館會議, 日本岡山縣.
3. Robert S. Jones, 1984: "Seismic Isolation and Protection", *Noise and Vibration Control in Building*, McGraw Hill, pp253-314.
4. I. Kajiwara, A. Agamatsu, K. Seto. 1989: "A Technique of Structural Dynamic of Optimization Using Sensitivities of Resonance and Anti-resonance Frequencies", *Current Topics in Structural Mechanics - Presents at 1989 ASME Pressure Vessels and Piping Conference*, pp161-167.
5. G. Dudley Shepard, 1985: "On Antiresonances, with Application to Control of Structures", *Proceeding of the 3rd International Modal Analysis Conference*, Orlando, FL, USA., pp.523-526.

6. K.C. Chang, G.C. Yao, G.C. Lee, D.S. Hao and Y.C. Yeh, 1991: Dynamic Characteristic of a Full Size Five-Story Steel Structure and 2/5 Scale Model, Section 2, Technical Report NECCR-91-0011, USA.