*Smolarkiewicz*正定義水汽平流法
在中央氣象局區域預報模式的應用

柳 再 明[1]　**郭 鴻 基**[2]

1. 中央氣象局氣象資訊中心

2. 國立臺灣大學大氣科學系

摘 要

我們將Smolarkiewicz正定義(positive definite)法，應用在中央氣象局區域預報模式(CWB LFS)的水汽平流方程中；其中不僅包含水汽的水平平流方面，我們也處理水汽的垂直平流部份。在研究探討中發現，因為CWB LFS的水汽平流方程，是含有地表氣壓的保守型式之方程，所以Smolarkiewicz法文獻上所提的正定義法公式不能直接使用；但依據其方法的原理，我們推導出正確的，且適用CWB LFS水汽平流方程的Smolarkiewicz正定義法。

個案研究結果指出，Smolarkiewicz法除了有合理的水汽保守外，在降水預報方面，較之作業的二階差分法(FD2)或是空間四階時間二階差分法(FD4)，都有較大的降水預報強度，以及較正確的降水預報位置（當提高模式解析度時，更能突顯這些特性）。當然完全沒有負水汽產生，不需要如FD2、FD4做人為的填平，在長期模擬方面會有較合理的水汽過程，這些都是本文探討Smolarkiewicz正定義水汽平流法，所要強調的重點。

關鍵詞：正定義水汽平流法、二階差分法、空間四階時間二階差分法。

一・引言

在計算流力的領域中，平流數值方法的探討是十分重要，對大氣科學而言亦不例外；國外探討平流計算之文章不勝枚舉，詳細可見Rood(1987)之文或Haltiner和Williams(1980)。國內郭鴻基等(1990)在交錯網格上，探討了二階及四階空間二階時間差分法(FD4)應用的平流問題，以及一些正定義計算方法的探討比較。郭和柳(1994)探討一維Smolarkiewicz法及Hsu-Arakawa法的基本性質，柳和郭(1994)深入研究Smolarkiewicz法交錯項的意義。平流計算法在於數值天氣預報、動量通量傳送、或雲模式之水氣傳送、平衡動力模式之位渦傳送、以及化學模式之傳送等都有極大應用性。Rasch和Williamson(1991)指出NCAR(National Center for Atmospheric Research) CCM(Community Climate Model)之水汽平流，使用不同的數值平流方法會得全然不同的氣候場；這顯示在氣候模式中，水汽平流數值方法之重要性，遠在模式本身之上。

正定義法(positive definite scheme)是指在數值積分過程中，保持平流場值恆為正的平流數值方法。一般正定義計算法，皆有良好之質量保守，物理場只向下游傳送，以及被傳送場只跟當地(local)性質有關之特性。這些特性對平流方程式計算而言，是十分的重要。正定義方法的種類方面，flux-corrected transport (FCT)法是相當著名的方法(Boris和Book 1973;Boris 1976;Book等1975;Zalesak 1979)。FCT法對方形波的平流模擬結果近乎完美，但其缺點是，會把一平滑之正弦波變成一方形波，而且造成極大值之衰減(Rood 1987)。Smolarkiewicz(1983)的非線性平流正定義數值方法，擁有預報與校正兩階段，其方法在校正階段利用泰勒(Taylor)級數，導出反擴散(anti-diffuse)的過程，以重新聚集預報階段（上游法）所擴散出去的質量，減少極大值之衰減。

有關正定義法在模式的應用方面：Smolarkiewicz和Clark(1986)文中研究Smolarkiewicz法在Clark(1977)的對流雲模式之應用。Smolarkiewicz和Grabowski(1990)

應用 Smolarkiewicz 法在邊界層大渦 (large eddy) 的模擬。Hsu 和 Arakawa(1990) 文中將 Hsu-Arakawa 法應用在等熵模式中。Rasch 和 Williamson(1990,1991) 應用半拉格朗法在 NCAR CCM(Community Climate Model) 之水汽平流；Lin 等 (1994) 應用 van-Leer 法在 NASA GLA(Goddard Laboratory for Atmospheres) 的水汽傳輸上，二者都指出應用正定義法的水汽平流，在長期模擬方面會有較合理的降水場。本文中第二節簡述研究方法，第三節是個案討論與總結。

二.研究方法概述

CWB LFS 所用的水汽平流方程爲 (1) 式

$$\frac{\partial(\psi\pi)}{\partial t}+\frac{\partial(u\psi\pi)}{\partial x}+\frac{\partial(v\psi\pi)}{\partial y}+\frac{\partial(\dot{\sigma}\psi\pi)}{\partial\sigma}=0, \quad (1)$$

其中 ψ 爲水汽混和比，π 爲地表氣壓，u 爲風速之水平 x 分量，v 爲風速之水平 y 分量，$\dot{\sigma}$ 爲風速之垂直分量，σ 爲垂直座標。此方程式與前文，郭和柳 (1994) 探討正定義平流法之基本性質，所用的方程不同 (沒有地表氣壓 π)，但和 Lin 等 (1994) 的水汽方程類似 (其爲球面座標系)。因爲 (1) 式多了一個地表氣壓的變數，Smolarkiewicz(1983;1984) 文中所提的正定義法無法直接使用。但依據其方法的原理，我們推導出適用 (1) 式的 Smolarkiewicz 正定義法。

對於含有地表氣壓的 (1) 式，其一維水汽方程 (取前兩項) 的 Smolarkiewicz 法，我們有兩種推導方式，一是水汽及地表氣壓同時以上游法處理 (S1)，二是僅水汽以上游法處理，而地表氣壓以二階中差法處理 (S2)。以下簡述推導結果：

1. 水汽及地表氣壓同時以上游法處理 (S1)

最後推導結果，其反擴散速度 $\tilde{u}$ 爲

$$\tilde{u}=\frac{1}{2}\frac{(|u|\Delta x-u^2\Delta t)\frac{\partial(\psi\pi)}{\partial x}}{\psi\pi}-\frac{1}{6}\frac{(u\Delta x^2-u^3\Delta t^2)\frac{\partial^2(\psi\pi)}{\partial x^2}}{\psi\pi}+O(\Delta t^3,\Delta x^3). \quad (2)$$

此式與郭和柳 (1994) 之 (13) 式極其類似，似乎是其 (13) 式之 ψ 以 $\psi\pi$ 取代，即是本文之 (2) 式。也就是說，只要讀者同意 ψ 及 π 同時以上游法定差平流是合理的，本推導說明 $\partial\psi/\partial t+\partial(u\psi)/\partial x=0$ 的式子，以 $\psi=\psi\pi$ 代入，即可處理 $\partial(\psi\pi)/\partial t+\partial(u\psi\pi)/\partial x=0$ 的方程。

2. 僅水汽以上游法處理，而地表氣壓以二階中差法處理 (S2)

最後推導結果，其反擴散速度 $\tilde{u}$ 爲

$$\tilde{u}=\frac{1}{2}\frac{(|u|\Delta x-u^2\Delta t)\frac{\partial(\psi\pi)}{\partial x}}{\psi\pi}-\frac{1}{6}\frac{(u\Delta x^2-u^3\Delta t^2)\frac{\partial^2(\psi\pi)}{\partial x^2}}{\psi\pi}+\frac{\frac{\partial\pi}{\partial x}(\frac{u}{4}\frac{\partial\psi}{\partial x}\Delta x^2-\frac{1}{2}|u|\psi\Delta x)}{\psi\pi}+O(\Delta t^3,\Delta x^3). \quad (3)$$

此式與 (2) 式比較，多了最後一項；(3) 式的地表氣壓 π 是以二階中差法處理，較之 (2) 式的 π 以一階上游法處理之結果，(3) 式比上 (2) 式，因使用的差分階次較高，所以計算項次較多而有較高的精確度。

三、個案討論與結論

我們將 CWB LFS 的水汽平流方程，由原來的 FD2，改成 Smolarkiewicz 法 (Smolarkiewicz 1983)，其餘部份如溫度場的平流、風場的平流，仍沿用模式舊有的 FD2 平流法。所選取的研究個案時間爲 1995 年 3 月 2 日 0000UTC，見圖 1 爲海平面氣壓的客觀分析，大陸高壓強度 1050 百帕位於蒙古地區，冷氣團由此中心逐漸向南推動，台灣地區受高壓前緣冷暖空氣交會的影響，天氣不穩定。圖 2 及圖 3 同是 CWB LFS 海平面氣壓及地面降水的 12 及 48 小時預報，唯圖 2 是 FD2，而圖 3 是 Smolarkiewicz 法。圖 2 和圖 3，二者的地面氣壓預報場差別不大。比較 12 小時預報之圖 2a 與圖 3a，在台灣地區附近，使用 FD2 的圖 2a，其最大降水中心似乎不在台灣地形上，而位於台灣海峽；而採用 Smolarkiewicz 法的圖 3a，最大降水中心在台灣地形上 (郭等 1990 指出 FD2 的相位會往上游偏移)。48 小時預報的圖 2b 及圖 3b，預報之降水型態二者大致相似，圖 3b 的降水預報強度比圖 2b 稍強 (20 毫米及 18 毫米)，這對 CWB LFS 降水預報一向偏弱的情況而言，水汽平流方面使用 Smolarkiewicz 正定義法，相信是可以提昇降水預報的精確度。Smolarkiewicz 水汽平流法無頻散的特性，應用在全球模式長期模擬方面也會有助益。

圖 3 Smolarkiewicz 法所使用的方式，是上一節公式推導的第二種型式 (地表氣壓以中差法處理；文後以 S2 簡稱)，而第一種推導型式 (地表氣壓以上游法處理；文後以 S1 簡稱) 的地表氣壓及降水型態的預報，和 S2 差別不大所以不再列圖贅述，進一步分析的數據統計見表 1。表 1 的數據是取自 (I = 71 至 111，J = 41 至 61)(總網格點數有 161 × 121) 範圍內的預報降水資料，此範圍涵蓋本個案 12 至 48 小時，台灣地區附近的降水預報區域。就 CWB LFS 降水量預報一向偏弱而言，表 1 的數據顯示，不論在降水量的極值或是降水量的總和兩方面，S2 是一很優秀的水汽平流方法。也可見到，因爲 FD4 比 FD2 有較高的精確度 (高兩階)，降水強度有些許的改善，然而就如前文圖 3 及圖 5 的比較結果，FD4 的重要性是相位較正確，FD4 大幅訂正 FD2 相位往上游偏移的缺點。S1 在降水量極值的預報方面表現和 S2 約相當，然而 S1 在降水量總和的預報，不如其他三種方法。確實原因或許還是一個謎，我們不知爲何降水

極值可以維持很好的方法，其降水總和卻不如FD2(柳1993指出SMH的極值有過多(overshoot)的情形，然而其精確度不如FD4)。回溯上節公式的推導，S1是使用(2)式，S2使用(3)式；兩式的差別在於,S2對於地表氣壓的處理是用二階定差，比S1的上游法高了一階，因此(3)式多了地表氣壓梯度的校正項。由本節實際資料的探討或許也指出(3)式所多出來修正項的重要性，也就是說對於含有地表氣壓π之$\partial(\psi\pi)/\partial t + \partial(u\psi\pi)/\partial x = 0$方程的處理，並不是借由方程$\partial\psi/\partial t + \partial(u\psi)/\partial x = 0$以$\psi = \psi\pi$代入即可；也就是說地表氣壓$\pi$僅以一階上游法處理精確度不夠。由降水極值尚無法看出S1的缺失，在降水量總和的探討才看出。

當水汽方程含有地面氣壓的變數時，對大多數的平流方法不會產生困擾(Lin等1994的van Leer-type法;Ritchie H. 1985的半拉格朗日法)；本文探討的Smolarkiewicz法是上游法的應用；上游法是取上風處的物理量來平流，其優點是沒有頻散，恆保持被平流物理場的正負值。然而上游法的缺點則爲其僅是一階的差分法，消散(dissipation)的情形嚴重(Smolarkiewicz 1983)。因此當水汽方程含有地面氣壓變數的狀況下，對於Smolarkiewicz法，我們之所以有兩種推導方式(一是水汽及地表氣壓同時以上游法處理(S1)，二是僅水汽以上游法處理，而地表氣壓以二階中差法處理(S2))，實際上是因爲第一種方法，地表氣壓以上游法處理，精確度不夠(由表1的數據可知)，因此我們提高定差法的階次，以第二種方法，地表氣壓以二階中差法處理，來提高精確度。兩種方法對降水場極值的掌握，都比FD2或FD4來的優秀，而對降水場總量的預報，僅S2比FD2或FD4來的好。S2之地表氣壓以二階中差法處理，並沒有改變Smolarkiewicz法正定義的本質，因爲地表氣壓的數值較大，二階差分法的頻散性質(振幅)，並不會造成負的地表氣壓。假如水汽不以上游法平流，而以其他差分法處理(地表氣壓仍維持以上游法平流)，平流結果可能不會維持正的水汽場，如此過程已不再是Smolarkiewicz正定義水汽平流方法，已不在本文討論的範疇裡。

參考文獻:

柳再明, 1993: 正定義數值方法的探討。國立臺灣大學大氣科學所博士論文。300頁。

柳再明, 郭鴻基, 1994: Smolarkiewicz正定義數值方法中的交錯項。大氣科學, **22**, 277-295。

郭鴻基, 柳再明, 周仲島, 1990: 平流傳輸方程的計算：交錯網格之有限差分法。大氣科學, **18**, 159-169。

郭鴻基, 柳再明, 1994: 正定義數值方法的探討。大氣科學, **22**, 1-22。

Book, D. L., J. P. Boris and K. Hain, 1975: Flux-corrected transport. II: Generalizations of the method. *J. Comput. Phys.*, **18**, 248-283.

Boris, J. P., 1976: Flux-corrected transport. III: Minimal-error FCT algorithms. *J. Comput. Phys.*, **20**, 397-431.

Boris, J. P., and D. L. Book, 1973: Flux-corrected transport. I: SHASTA, a fluid transport a algorithm that works. *J. Comput. Phys.*, **11**, 38-69.

Haltiner, G. J. and R. T. Williams 1980: Numerical Prediction and Dynamic Meteorology. second edition, *John Wiley and Sons, New York*, 477pp.

Hsu, Y.-J., and A. Arakawa, 1990 : Numerical modeling of the atmosphere with an isentropic vertical coordinate. *Mon. Wea.Rev.*, **118**, 1933-1959.

Lin, S.-J., W. C. Chao, Y.-C. Sud, and G. K. Walker, 1994: A class of the van Leer-type transport schemes and its application to the moisture transport in a general circulation model. *Mon. Wea. Rev.*, **122**, 1575-1593.

Rasch, P.J., and D.L. Williamson, 1990: Computational aspects of moisture transport in global models of the atmosphere. *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.*, **116**, 1071-1090.

Rasch, P. J., and D. L. Williamson, 1991: The sensitivity of a general circulation model climate to the moisture transport formulation. *J. Geophys. Res.*, **96**, 123-137.

Rood, R. B., 1987: Numerical advection algorithms and their role in atmospheric transport and chemistry models. *Rev. of Geophys.*, **25**, 71-100.

Smolarkiewicz, P. K., 1983: A simple positive definite advection scheme with small implicit diffusion. *Mon. Wea. Rev.*, **111**, 479-486.

Smolarkiewicz, P. K., 1984: A fully multidimensional positive definite advection transport algorithm with small implicit diffusion. *J. Comput. Phys.*, **54**, 325-362.

Smolarkiewicz, P. K., and T. L. Clark, 1986: The multidimensional positive definite advection transport algorithm: further development and applications. *J. Comput. Phys.*, **67**, 396-438.

Smolarkiewicz, P. K., and W. W. Grabowski, 1990: The multidimensional positive definite advection transport algorithm: Nonoscillatory option. *J. Comput. Phys.*, **86**, 355-375.

Zalesak, S. T., 1979: Fully multidimensional flux-corrected transport algorithms for fluids. *J. Comput. Phys.*, **31**, 335-362.

The application of the Smolarkiewicz moisture advection schemes to the CWB limited area model

Tzay-Ming Leou[1] **Hung-Chi Kuo**[2]

1. Computer Center, Central Weather Bureau
2. Dept. of Atmospheric Science, National Taiwan University

ABSTRACT

We have implemented of Smolarkiewicz positive definite schemes to the moisture advection equation of the CWB limited forecast system(LFS). Which involve both horizontal advections and vertical advection. To conserve mass, it is important that the π-weighted mixing ratio (πq) be the predicted quantity to the moisture advection equation of CWB LFS. So we deduced the correct Smolarkiewicz schemes for the π-weighted moisture advection equation, which couldn't been used suitably to the original Smolarkiewicz schemes.

Cases study shown that compare to operational scheme(FD2) or FD4, Smolarkiewicz schemes have reasonable moisture conservation 、 stronger precipitation amounts and more correct precipitation position, which is important when the grid size decreasing. It is also important point that without any negative moisture points after advections, so the Smolarkiewicz schemes should have better water vapor processes under the long term integration, e.g. climate simulation.

Key Words : positive definite scheme 、 second order difference 、 fourth order space second order time difference

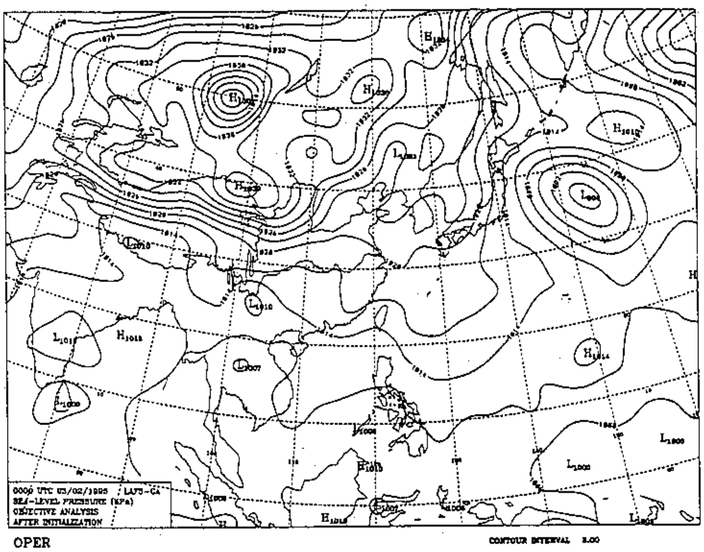
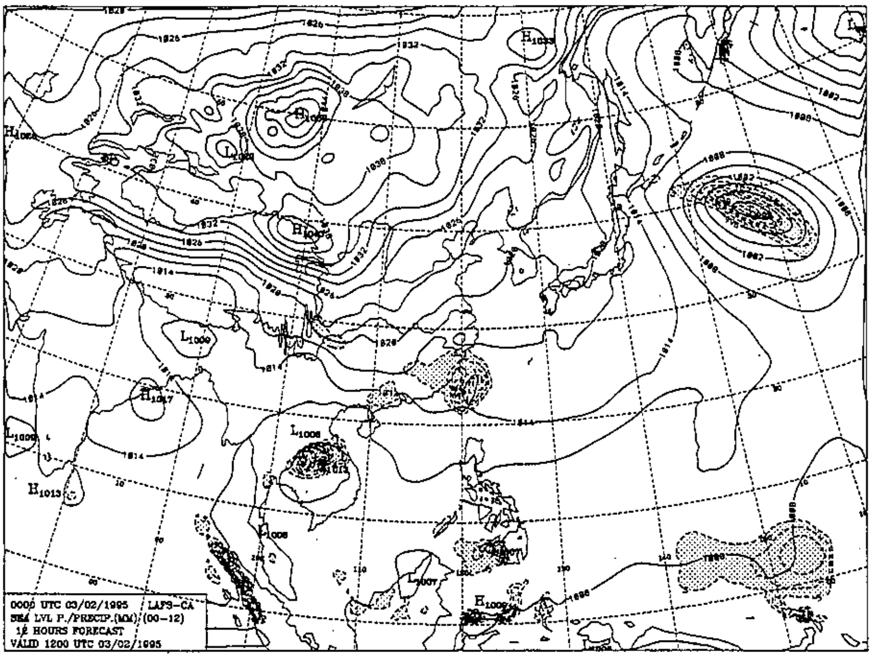


圖 1. 1995年3月2日 0000UTC海平面氣壓之客觀分析。



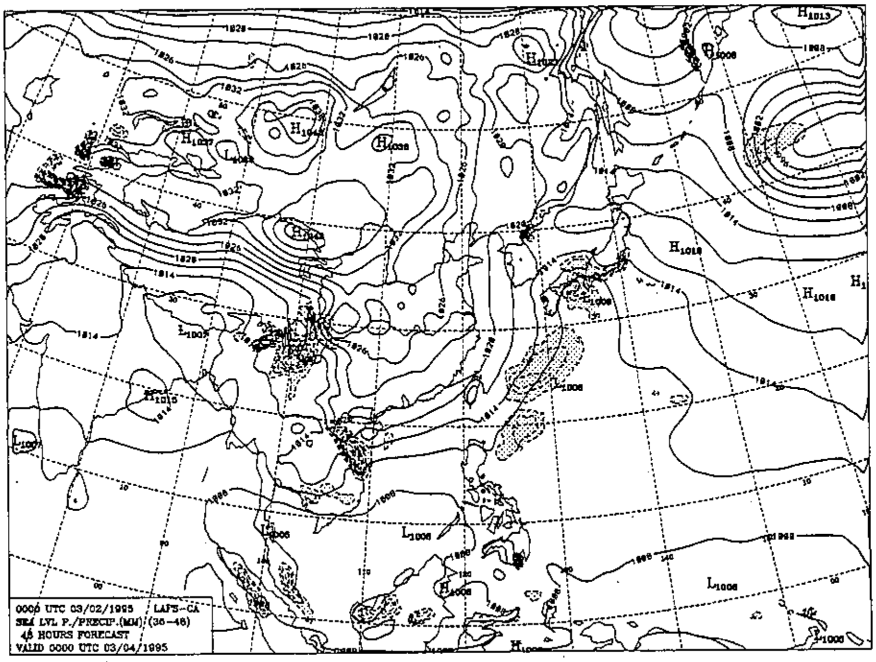
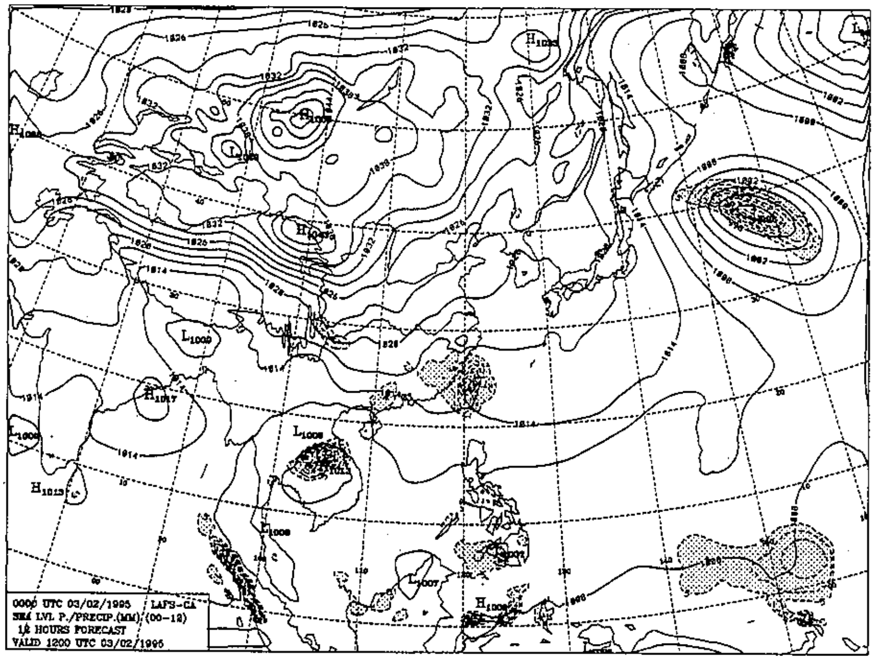
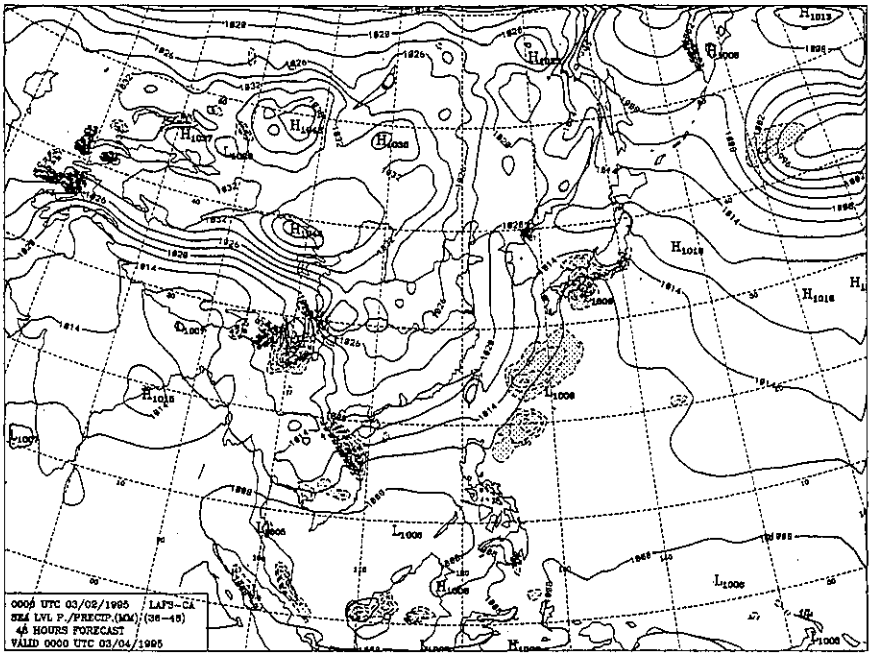


圖 2. CWB LFS 海平面氣壓及地面降水的 12 小時 (2a) 及 48 小時 (2b) 預報。



NSH3SF

CONTOUR INTERVALS 3.00 AND 5.00



NSH3SF

CONTOUR INTERVALS 3.00 AND 5.00

圖3.和圖2.約同，唯水汽平流方程的處理採用Smolarkiewicz法。

Unit (minimeters)	FD2	FD4	S1 (SH3SFP)	S2 (NSH3SF)
max. of 12h	27.51	31.81	38.88	30.86
max. of 24h	30.26	28.20	27.38	32.82
max. of 36h	31.41	34.79	36.29	39.79
max. of 48h	17.98	20.26	20.12	20.04
sum of 12h	1830.03	1847.36	1810.72	1832.91
sum of 24h	2312.24	2316.04	2230.82	2286.37
sum of 36h	2352.43	2351.75	2315.60	2381.19
sum of 48h	2205.70	2200.18	2190.79	2279.72
TOTAL	8700.39	8715.33	8547.92	8780.19
%	100%	100.17%	98.25%	100.92%

表 1.數據是取自(I＝71至111，J＝41至61)範圍內的預報降水資料