

# 應用半拉格朗日法探討雲模式中 的地形效應

張博雄

空軍氣象中心

曾忠一

中央研究院與國立臺灣大學

## 摘 要

積雲對流是相當複雜的大氣運動，由於尺度較小，傳統觀測方法並無法分析其內部結構，而自雷達加入觀測網後，對流雲的三度空間結構便有了更進一步的瞭解。1960年代以後，氣象學者體認到雲微物理和雲動力過程有著強烈的交互作用，而地面上不均勻的熱力，動力作用產生的環流，又常常是對流天氣的觸發機制，如山脈迎風面的氣流抬升，背風面的山岳波都能激發對流雲的發展。因此，要構成一個包含上述熱力，動力過程的雲模式，顯然必須考慮較完整的方程組，精確有效率的數值方法及健全的參數化格式。半拉格朗日時間離散法經數年發展，其除為一種穩定有效率的方法，時步較傳統方法要大，尚可應用在含水汽及強風切線的流場中，另在非靜力模式中，其表現亦不錯。但在Tanguay(1990)的非靜力模式中並未加考慮山脈效應，而考慮地形將產生非線性作用，本研究將採用非靜力半隱式半拉格朗日法雲模式，探討半拉格朗日法與地形效應的結合，我們利用古典山岳波理論測試，然後利用一不穩定大氣環境模擬山脈對流雲的發展。

## 一. 前言:

中小尺度模擬包含複雜的動力及物理過程，此動力過程常包含雙重時間尺度之運動，要達成模式的完整性，因有快速時間尺度運動（雲模式之聲波），將增加計算時間，而以往的數值格式其時間步長的選取主要在維持積分的穩定性，以至使時間截斷誤差小於空間誤差因而使模式積分效率不佳。為了引用快速及準確的數值方法，Robert(1981)提出改良的半拉格朗日時間離散法的觀念，傳統時間離散法為在同一點上作時間外延，而半拉格朗日法則沿質點軌跡作時間差分，由圖1可知尤拉格式固定利用 $n-1$ 時步的 $j, j-1$ 點來內插 $n-1$ 時步的物理量，而半拉格朗日法則沿質點軌跡 $\overline{PB}$ 尋找 $n-1$ 時步的來源點，而後利用該點周圍網格來內插 $n-1$ 時步的物理量，由此可知為了不使尤拉法的位移點離開 $j, j-1$ 之間於是有 CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) 判據 $\Delta t < \Delta x / U$ 的限制，而半拉格朗日法若能準確找到位移點，則只須考慮內插準確與否，而與所

取 $\Delta t$ 大小無關，此法不僅時步較大，且準確。Robert(1980)並以Cubic Spline從事內插，並以疊代法找尋位移點，將半拉格朗日法與半隱式格式結合，既在測試的淺水方程模式中將重力波項以隱式格式處理，結果 $\Delta t$ 較尤拉法採用半隱式要大4至6倍，採用半拉格朗日法首先須決定質點位移距離 $\alpha$ ，然後利用內插格式求出 $n-1$ 時步位移點物理量，位移距離 $\alpha$ 由下式決定：

$$\alpha = U^*(x - \alpha / 2, t + \Delta t / 2) \Delta t$$

$U^*$ 的決定又分為二位面與三位面格式， $U^*$ 為質點位移距離中點的位移速度，二位面既利用前兩時步的速度來外延，郭廷新(1991)、Staniforth and Temerton(1986)及他人測試不同外延法得到二位面格式具以下優點：

- (a) 程式編寫較容易
- (b) 計算機記憶容量較小
- (c) 沒有計算模，三位面為在軌跡上作跳蛙式時間離散故會有計算模
- (d) 效率是三位面的兩倍

### (e) 不須作時間過濾

求得位移距離  $\alpha$  後，須採用內插法將網格點上的資料內插至位移點上，事實上半拉格朗日法的內插特性具有輕微的耗散作用，幸運的這些作用是具尺度選擇性的，McCalpin(1988)比較傳統的人為耗散格式如Laplacian, Biharmonic 耗散，半拉格朗日法耗散似較傳統要小，對非線性效應有較合理的抑制作用。

Bermejo (1990)利用半拉格朗日法平流缺口圓柱體，證明半拉格朗日法在形狀保持有很好的結果，Staniforth and Cote (1991)指出半拉格朗日法較傳統尤拉法要準確，Kuo and Williams (1990)積分無黏性Burgers eq., 當  $t \rightarrow 1$  時將產生強梯度，此對數值方法為一挑戰，結果顯示半拉格朗日法得到非常近似解析解的數值解，而且他們也證明在這運動速度梯度很大下， $\Delta t$  仍然可以用得很大，所以半拉格朗日法兼有效率及準確之特性，由於大氣中的水汽分布非常複雜，通常在空間分布非常極端，由上可知，半拉格朗日法不僅應用在平滑流場中，對於極端梯度的模擬仍表現良好，故而可應用在含水汽及強風切線的模擬中。

以往半拉格朗日法常應用在大尺度預報中，得到很好的結果，Tanguay (1990)首先將半拉格朗日法應用於非靜力區域模擬中，引進非靜力將造成比重力波更快的聲波，採用半隱式格式是必須的，以使聲波減速避免  $\Delta t$  過小，結果顯示半拉格朗日法仍為一準確有效率的方法，但其中仍有些不足，如不含山脈，簡單的水汽變化，低解析度，但這是半拉格朗日方法邁向非靜力模擬的重要一步，郭廷新(1991)利用二位面半隱式半拉格朗日法與可壓縮非靜力雲模式結合，加入高度參數化的雲物理，獲得很好的結果，但其中仍未加入地形。

在保守性方面，由於波動成份間的交互作用，不斷形成網格無法分辨的波，而後由混淆誤差，短波能量不斷增加，導致非線性不穩定，在中長期預報必須抑制非線性不穩定產生，Arakawa (1966)提出能量守恆格式，而不用人為耗散的方法，半拉格朗日法的保守性並沒有很確定的證明，只有Bermejo (1990)利用Cubic Spline內插法導出對無輻散氣流場，質量是保守的，而由其它的數值實驗對能量的計算可知，半拉格朗日法的能量保守仍在可接受的範圍內，Ritchie (1988)

則指出半拉格朗日不論內插或非內插均較尤拉法有較佳的保守性。

雖然一些特性已經証實，但仍有許多領域仍待研究，其中半拉格朗日法與地形的結合為一有趣的問題，Kass (1987)利用Robert(1985)之模式加入山脈，他指出在 $\sigma$ 座標下，若平均風場很強，越過山脈時，水平氣壓梯度將產生不穩定，Coiffer et al. (1987)利用線性斜壓模式指出，若用太大的 $\Delta t$ 將產生錯誤的穩衡解，基本上 $\Delta t$ 與平均風場，山脈形狀有很大的關係，Tanguay (1990)則建議採用terrain following coordinate，將山脈效應加入半拉格朗日法中，不僅是適用於非靜力模式，且適用於半拉格朗日格式。本研究將採用郭廷新(1991)的半隱式半拉格朗日法雲模式，採用 terrain following coordinate 進行地形效應的測試，探討在半拉格朗日法雲模式中加入地形的可行性，我們除了進行dry convection氣流過山之測試外，我們也將測試兩層大氣，不同內插法的效應，最後我們考量在有水汽狀態時，半拉格朗日法雲模式模擬的山脈對雲發展之影響。

## 二. 模式簡介:

模式採用郭廷新(1991)的二維半隱式半拉格朗日法雲模式，在數值方法上，隱式格式採用梯形法，平流採用半拉格朗日法，位移點採用二位面時間外延 $n+1/2$ 時步速度場來求取，上述方法均為與半拉格朗日法較佳的組合，在地形波動的模擬，我們採用二維平板對稱，忽略 $y$ 方向變化，並假設山脈沿山脊無限延長，忽略科式效應，只考慮Rossby No. 很大的狀況，垂直座標採用Terrain following coordinate，由於引進地形，在卡氏座標中在地面起伏處空間差分計算困難故須轉換到一個直角座標空間中，採用terrain following coordinate的優點如下：

- (a) 為一對一轉換，轉換關係簡單。
- (b) 轉換後為一矩形空間，半拉格朗日法模式中的內插格式不須修改。
- (c) 地面起伏若為平坦則方程式與卡式座標中的相同，增加程式的通用性。
- (d) 水平向尺度不變，不須轉換，只有垂直向轉換。
- (e) 適用於非靜力模式中。

## a. 基本方程:

### a. 水質方程:

根據 Lin et al. (1980) 的參數化格式，考慮水汽，雲滴，雲冰，雨滴，雪，雹等六種水相，如圖 2：

$$\frac{dq_v}{dt} + w \frac{\partial \bar{q}_v}{\partial z} = P_{q_v} + D_{q_v}$$

$$\frac{dq_c}{dt} = P_{q_c} + D_{q_c}$$

$$\frac{dq_i}{dt} = P_{q_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{V}_i q_i)}{\partial z} + D_{q_i}$$

$$\frac{dq_r}{dt} = P_{q_r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{V}_r q_r)}{\partial z} + D_{q_r}$$

$$\frac{dq_s}{dt} = P_{q_s} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{V}_s q_s)}{\partial z} + D_{q_s}$$

$$\frac{dq_g}{dt} = P_{q_g} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{V}_g q_g)}{\partial z} + D_{q_g}$$

P 為水質產生項， $\frac{1}{\rho} \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{V} q)}{\partial z}$  為降落項，

D 為耗散項。

### b. 熱力方程:

$$\frac{d\theta'}{dt} + w \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = P_\theta + D_\theta$$

### c. 動力方程:

模式考慮一非靜力可壓縮系統

$$\frac{du}{dt} + C_p \bar{\theta} \frac{\partial \pi}{\partial x} = D_u$$

$$\frac{dw}{dt} + C_p \bar{\theta} \frac{\partial \pi}{\partial z} = g \left( \frac{\theta'}{\bar{\theta}} + 0.61 q_v - q_c - q_i - q_r - q_s - q_g \right) + D_w$$

$$\frac{d\pi}{dt} + w \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial z} + \frac{R}{C_v} (\bar{\pi} + \pi) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{R}{C_v} \frac{(\bar{\pi} + \pi)}{\bar{\theta}} \frac{d\bar{\theta}}{dt} = 0$$

$$\bar{\pi} + \pi = \left( \frac{P}{P_0} \right)^{\frac{R}{C_p}} \quad P_0 = 1000 \text{ mb}$$

## b. 座標轉換:

將 z 座標中的基本方程轉換至 terrian following coordinate  $\zeta$  中，關係式如下：

$$\zeta = \frac{z_t(z - z_s)}{z_t - z_s}$$

$z_t$  為積分域高度， $z_s$  為地面起伏，由此關係利用 Chain Rule 得到  $\zeta$  中的轉換式及全導數

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + (Gu + Hw) \frac{\partial}{\partial \zeta}$$

其中

$$G = \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\zeta - z_t}{z_t - z_s} \frac{\partial z_s}{\partial x}$$

$$H = \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{z_t}{z_t - z_s}$$

在此我們須注意，在  $\zeta$  座標中採用半拉格朗日法時，水平平流與垂直平流應用 u, w 在  $\zeta$  中的投影，u 在  $\zeta$  上的投影仍為 u, w 則為  $(Gu + Hw)$ ，其中包括 u 在垂直向的貢獻 Gu，整個來說，我們是利用  $\zeta$  中的平流速度 u,  $(Gu + Hw)$  來平流 z 中的物理量，這是半拉格朗日須注意的地方。

由上面關係式將 z 座標方程轉換如下：

$$\frac{dq_v}{dt} + Hw \frac{\partial \bar{q}_v}{\partial \zeta} = P_{q_v} + D_{q_v}$$

$$\frac{dq_c}{dt} = P_{q_c} + D_{q_c}$$

$$\frac{dq_i}{dt} = P_{q_i} + \frac{H}{\rho} \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{V}_i q_i)}{\partial \zeta} + D_{q_i}$$

$$\frac{dq_r}{dt} = P_{q_r} + \frac{H}{\rho} \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{V}_r q_r)}{\partial \zeta} + D_{q_r}$$

$$\frac{dq_s}{dt} = P_{q_s} + \frac{H}{\rho} \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{V}_s q_s)}{\partial \zeta} + D_{q_s}$$

$$\frac{dq_g}{dt} = P_{q_g} + \frac{H}{\rho} \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{V}_g q_g)}{\partial \zeta} + D_{q_g}$$

$$\frac{d\theta'}{dt} + Hw \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \zeta} = P_\theta + D_\theta$$

動力方程：

$$\frac{du}{dt} + C_p \bar{\theta} \left( \frac{\partial \pi}{\partial x} + G \frac{\partial \pi}{\partial \zeta} \right) = -C_p \theta' \left( \frac{\partial \pi}{\partial x} + G \frac{\partial \pi}{\partial \zeta} \right) + D_u = r_u$$

$$\frac{dw}{dt} + C_p \bar{\theta} H \frac{\partial \pi}{\partial \zeta} - g \left( \frac{\theta'}{\bar{\theta}} + 0.61 q_v - q_c - q_i - q_r - q_s - q_g \right) = -C_p \theta' H \frac{\partial \pi}{\partial \zeta} + D_w = r_w$$

$$\frac{d\pi}{dt} + u \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial x} + (Gu + Hw) \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial \zeta} + \frac{R}{C_v} \bar{\pi} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + G \frac{\partial u}{\partial \zeta} + H \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right) - \frac{R}{C_v} \frac{(\bar{\pi} + \pi)}{\bar{\theta}} \frac{d\bar{\theta}}{dt} - \pi' \frac{R}{C_v} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + G \frac{\partial u}{\partial \zeta} + H \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right) = r_\pi$$

上式  $r_u$ ,  $r_w$ ,  $r_\pi$  為非聲波重力波項，採用顯式格式，聲波重力波項採用梯形隱式格式，全導數採用半拉格朗日時間離散法。

半拉格朗日格式的構成：

$$q_v^{n+1} = Q_1$$

$$q_s^{n+1} = Q_5$$

$$q_c^{n+1} = Q_2$$

$$q_g^{n+1} = Q_6$$

$$Ri = \frac{N^2}{A^2 + B^2}$$

$$q_v < q_{vs}$$

$$q_i^{n+1} = Q_3$$

$$\theta^{n+1} = Q_7$$

$$Ri = \frac{N_m^2}{A^2 + B^2}$$

$$q_v = q_{vs}$$

$$q_r^{n+1} = Q_4$$

$$u^{n+1} + C_p \bar{\theta} \left( \frac{\partial \pi}{\partial x} + G \frac{\partial \pi}{\partial \zeta} \right)^{n+1} \left( \frac{\Delta t}{2} \right) = Q_8$$

$$K_m = k^2 \Delta t \Delta \zeta \text{Def}[\max(0, 1 - 3Ri)]^{\frac{1}{2}}$$

$$w^{n+1} + C_p \bar{\theta} H \frac{\partial \pi^{n+1}}{\partial \zeta} \left( \frac{\Delta t}{2} \right) - g \left( \frac{\theta'}{\theta} + 0.61 q_v - q_c - q_i \right.$$

$$K_h = 3K_m$$

$$\left. - q_r - q_s - q_g \right) = Q_9$$

$$R = K_h \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} + G \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \right)$$

$$T = K_h \frac{\partial \phi}{\partial \zeta}$$

( $\phi$  為熱力參數)

$$\frac{C_v}{R} [\pi^{n+1} + u \frac{\partial \pi}{\partial x} \left( \frac{\Delta t}{2} \right) + (Gu + Hw)^{n+1} \frac{\partial \pi}{\partial \zeta}] + \bar{\pi} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right.$$

$$\left. + G \frac{\partial u}{\partial \zeta} + H \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right)^{n+1} \times \left( \frac{\Delta t}{2} \right) = Q_{10}$$

$$D_u = \frac{\partial}{\partial x} (K_m A) + G \frac{\partial}{\partial \zeta} (K_m A) + H \frac{\partial}{\partial \zeta} (K_m B)$$

$$D_w = \frac{\partial}{\partial x} (K_m B) + G \frac{\partial}{\partial \zeta} (K_m B) - H \frac{\partial}{\partial \zeta} (K_m A)$$

$$D_\phi = \frac{\partial R}{\partial x} + G \frac{\partial R}{\partial \zeta} + H^2 \frac{\partial T}{\partial \zeta}$$

上式中的  $Q$  為位移點的物理量，須用內插求

取，令  $C_p \bar{\theta} = \bar{S}$ ， $C_v / R = \alpha$ ，

$$A_1 = Q_9 + g \left( \frac{\theta'}{\theta} + 0.61 q_v - q_c - q_i - q_r - q_s - q_g \right) \left( \frac{\Delta t}{2} \right)$$

$$u^{n+1} = -\bar{S} \left( \frac{\partial \pi}{\partial x} + G \frac{\partial \pi}{\partial \zeta} \right) \left( \frac{\Delta t}{2} \right) + Q_8$$

$$w^{n+1} = -\bar{S} H \frac{\partial \pi}{\partial \zeta} \left( \frac{\Delta t}{2} \right) + A_1$$

模式中  $k = 0.21$  (Deardorff, 1971)

$k_h / k_m = 3$  (Deardorff, 1972)

$\epsilon = 0.622$

代入  $\pi$  ' eq.

=> 由於採用隱式格式，且採用 terrian following coordinate：我們將解一個係數複雜的 Helmholtz 方程。由於方程係數非常數，我們用 Gauss-Seidel 法來解，疊代次數約 40 次可收斂。

### C. 次網格參數：

模擬地形波現象時，次網格渦流須用較大尺度變數來決定，我們採用 Durran and Klemp (1983) 引用 Lilly (1962) 的方法，在  $\zeta$  座標下：

$$A = \frac{\partial u}{\partial x} + G \frac{\partial u}{\partial \zeta} + H \frac{\partial w}{\partial \zeta} \quad B = H \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{\partial w}{\partial x} + G \frac{\partial w}{\partial \zeta}$$

$$\text{Def}^2 = A^2 + B^2$$

$$N^2 = gH \frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{d\zeta} \quad q_v < q_{vs}$$

$$N_m^2 = gH \left( 1 + \frac{L q_{vs}}{RT} \right) \left( 1 + \frac{\epsilon L^2 q_{vs}}{C_p RT^2} \right)^{-1}$$

$$\times \left( \frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{d\zeta} + \frac{L}{RT} \frac{dq_{vs}}{d\zeta} \right) - gH \frac{d(q_{vs} + q_c)}{d\zeta}$$

### d. 邊界條件：

模式採用的邊界條件在底邊及頂邊界採取剛體邊界，即所有預報值不變，採用半拉格朗日法於區域模式中，位移點常在積分域外，這時則選取邊界與軌跡之交點。

由對流或山脈將產生垂直向傳播的重力波，採用固定邊界時將使重力波反射回積分域中影響結果，Klemp and Durran (1983) 指出重力波分為水平及垂直傳播，水平重力波相速與群速相同，若能準確得知邊界處的平流速度，則可將重力波傳出積分域，因此我們採用在邊界上預報的方式，而垂直向重力波其相速與群速相反，故須採用放射或吸收邊界以有效放射或吸收重力波，我們在垂直向的頂邊界 ( $j=20$  到  $j=30$ ) 加入 10 層吸收邊界，即在邊界加入一過渡帶，利用人為耗散吸收重力波：

$$\phi^{(\tau+1)} = (1 - \alpha) \phi^{(\tau+1)} + \alpha \phi^{(0)}$$

其中  $\alpha$  為耗散係數，在此取線性變化在最內圈 ( $j=20$ ) 時  $\alpha=0$ ，最外圈 ( $j=30$ ) 時  $\alpha=0.5$ ，吸收邊界的優點是可有效吸收重力波，但計算時間較長

## e. 模式諸元:

### a. 乾模式

1. 積分範圍: 120 km × 12 km
2. 網格間距:  $\Delta X=2$  km,  $\Delta Z=40$  m
3. 時間步長:  $\Delta t=10$  s
4. 位移點求法: 二位面外延, 定點疊代法
5. 平流項: 半拉格朗日法
6. 聲波, 重力波項: 隱式格式 (梯形法)
7. 內插法: 考慮 Linear, quadratic, cubic 三種內插
8. 頂邊界: 吸收邊界

### b. 雲模式

1. 積分範圍: 60 km × 12 km
2. 網格間距:  $\Delta X=1$  km,  $\Delta Z=400$  m
3. 時間步長:  $\Delta t=5$  s
4. 雲物理: Lin et al. (1983), 圖 2
5. 調整格式: Tao et al. (1989)

## 三. 半拉格朗日法與地形結合的測試:

在構成一數值模式時, 為增加可信度, 我們利用已知的古典線性山岳波理論來測試模式與地形結合的可行性, 由於模式幾何上採用二維平板對稱, 我們假設山脈沿  $y$  方向延伸, 只考慮  $X-Z$  方向變化, 且考慮 Rossby No. 很大的情況, 忽略科氏效應。模式積分初期通常利用幾種方法避免風場產生過多擾動如逐漸增加平均風場或逐漸增加山脈高度, 我們則直接將風場加入模式由模式自行調整。一方面由於半拉格朗日法的平流特性逐漸增加風場可能造成位移點尋找錯誤, 一方面保留可能產生的物理過程, 也可節省預報時間。

### a. 小振幅山脈測試:

雖然模式採用非線性非靜力穩定的系統, 但若底邊界山脈振幅很小, 模式積分初期結果應與線性解析解近似, 一般考慮小振幅山脈, 由於是線性的, 因此將數值解乘上相對大振幅山脈的倍數, 可得到大振幅山脈的解。根據山岳波理論, 波動與山脈形狀及 Scorer 參數有關, Scorer 參數  $L^2 = \frac{N^2}{U^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$  表示垂直傳播的重力波水平向的最大波數, 為顯示模式確可模擬山脈波, 首先考慮一等溫大氣, 平均風場不隨高度改變, 令  $\bar{T}=250^\circ$  K,  $\bar{u}=20$  m/s, 山脈剖面取 Queney (1947, 1948)

所用  $Z_0(x)$  為底邊界

$$Z_s = \frac{ha^2}{(x^2+a^2)}$$

$h=10$  m, 山脈半寬  $a=10$  km, 定義無因次時間  $\bar{u}t/a$ , 模式採用時步取 10 秒, 積分時間 16000 秒, 無因次時間為 32, 根據 Durran and Klemp (1982a, 1983), 若模式達到穩態, 則動量通量隨高度近似常數, 動量通量定義為  $M(z) = \int \overline{\rho' u' w'} dx$ , 大約  $\bar{u}t/a=20$  以後模式可達穩態, 我們將模式所得數值解與 Klemp and Lilly (1978) 利用相同基本場的結果比較, 若根據 Klemp and Lilly (1978) 所得水平速度場, 垂直動量通量及位溫場由所得模式初期結果, 積分時間  $t=15000$  秒,  $\bar{u}t/a=30$  時,  $l_2 = 9.5 \times 10^{-7}$  m $^{-2}$  不隨高度改變, 乘上 100 倍得到相對於 1 km 山脈時的解我們利用半拉格朗日所模擬的  $u$  值在 2 km 處為 29.6 m/s, Mahrar and Pielke (1978) 利用上游格式得到的是 27.3 m/s, 而他們利用 Spline 內差插則為 29.6 m/s, 若根據位溫場, 在向風處等溫線上昇, 間格縮小, 顯示氣流上升絕熱冷卻, 背風處則有下沉增溫, 最大下沉速度在背風處約 -1.33 m/s, 由所得流線圖, 在背風處有一弱槽, 流線脊由山頂向上逐漸減弱, 重力波相位隨高度向上游傾斜。

### b. 大振幅山脈測試:

為測試模式對真實狀況的表現, 利用  $h=1$  km,  $a=10$  km 作測試,  $\bar{T}=250^\circ$  K,  $\bar{u}=20$  m/s, 由於山脈振幅加大, 此時非線性及非靜力效應將扮演更重要的角色, 以往對模式中的短波採用人為耗散來控制非線性不穩定的發生或濾掉短波模, 但並非不穩定的發生均是來自短波, 因此完全濾掉短波似乎不合理, 半拉格朗日法對不同尺度分量波具選擇性的耗散較合理, 圖 3 (a) 為採用 Cubic 內插所得水平速度場,  $u$  在山頂處為 29.7 m/s, 預報值與線性山脈模擬之結果相似, 流線亦與線性理論相似, 迎風面絕熱降溫, 背風面下沉增溫, 最大下沉速度為 -1.27 m/s, 圖 5 為動量通量隨時間變化圖, 模式達到穩態時, 動量通量隨高度近似常數, 在頂層約 8~12 km 處動量通量隨高度迅速減低, 這是因採用吸收邊界的結果, 由圖 5 可看出在  $t=9000$  秒至  $t=16000$  秒, 模式已達穩態。

### c. 兩層大氣模式測試

前述模擬只考慮等溫大氣， $l^2$ 不隨高度改變，由解可看出山脈後方並無明顯 Lee wave 產生，經過山脈僅只跳躍通過，然後回復平衡，Scorer (1949, 1953)將大氣分為兩層，各具不同  $l^2$  值，他指出要產生 Lee wave，則  $l^2$  須隨高度遞減，即上層較底層低，且有不連續的情形，要達到此目的可由 (1)  $u$  隨高度增加，(2) 增加低層穩定度，我們利用溫度場來造成類似剖面，令 3.2 km 以下溫度為等溫  $T=280^\circ\text{K}$ ，大於 3.2km 以  $-8^\circ\text{K/km}$  遞減率遞減，平均風場  $\bar{u}=20\text{ m/s}$ ， $h=300\text{m}$ ， $a=3\text{km}$ ，內插採用 Cubic 內插，由於剖面類似，在預報值上有所不同，但型式類似，圖 4 為水平速度場數值解，最大水平速度在山頂  $u=23.3\text{ m/s}$ ，由所得垂直速度，最大下沉速度在山頂偏下游約  $-0.963\text{ m/s}$ ，上昇速度  $1.86\text{ m/s}$ ，垂直速度隨著向下游迅速遞減，若根據流線圖，可看出明顯的 Lee wave 產生，在近地面 Lee wave 並不明顯，但其振幅隨高度增加，而後遞減，振幅亦隨著向下游遞減，若與解析解比較，也有此現象但並不大，此可能與半拉格朗日法耗散有關，由上測試亦可知大氣中的不連續面是形成 Lee wave 的重要物理作用，許多觀測亦顯示，逆溫層或穩定層幾乎是 Lee wave 產生的機制。

### d. 半拉格朗日法不同內插法的測試

半拉格朗日時間離散法在前一時間的值並不一定在固定網格點上，因此必須採用內插法來求取，內插的選取對模式的準確度及效率有極大影響，半拉格朗日法有許多不同的內插法，除前述採用的四階準確 Cubic 內插外，還有 Linear 內插，quadratic 內插，由反應函數可知，內插的耗散是具尺度選擇性的，主要在  $2\Delta X$  的波，而高階內插如 quadratic 內插對各成分波耗散很小，主要仍在  $2\Delta X$  的短波，本節我們採用 Linear，Quadratic 內插來考慮山脈波動問題，圖 3 為 Quadratic 內插所得大振幅山岳波解，山頂 2 km 高度處水平速度  $u$  在  $t=16000$  秒時為  $29.3\text{ m/s}$ ，與 Cubic 內插比較，較 Cubic 內插稍小，圖 5 為 Quadratic 內插的動量通量傳送，大約  $t=9000$  秒後逐漸達到穩態，但其值隨高度稍不同，吸收邊界附近 Quadratic 內插曲線較平滑，圖 3 為 Linear 內插結果，水平風場在山頂 2km 高度處為  $27.1\text{ m/s}$ ，明顯的較另兩格式要小很多，由所得動量通量

，由於 Linear 內插耗散過大，動量通量隨高度迅速遞減，綜合上述我們可知 1. Cubic 內插較 Quadratic，Linear 內插準確，2. Cubic 較另兩種方法有較佳的守恆性，Linear 內插耗散嚴重，不適用於中長期預報，3. 短期預報若考慮效率可選用 Quadratic 內插，若考慮準確性保守性則用 Cubic 內插較好。

## 四. 山脈對流雲發展模擬：

模式經測試可知半拉格朗日法引入地形效應是可行的，接著我們利用條件不穩定大氣環境作為初始場，模擬地形對雲發展的影響，對流雲發展包含複雜的動力及雲物理過程，山脈氣流可影響對流雲的動力甚至雲物理，而對流雲亦可影響山脈氣流，在不穩定大氣中，山脈迎風面將造成氣流抬升，水汽凝結足夠將形成降雨，而降雨的下降氣流將減弱山脈的上升氣流，有些地方山脈背風面降雨量比迎風面，通常在山脊形成對流雲消散後其下沉氣流沿山脈下降，由於摩擦減速，在背風面形成輻合氣流，若大氣為不穩定則將引起對流，另外環境對雲的發展亦有影響，如底層相對濕度，山脈坡度，平均風場強度，我們利用一條條件不穩定大氣環境作為初始場，模擬地形對流雲的發展，令平均場不隨時間改變。海平面溫度  $25^\circ\text{C}$ ，海平面至 0.8 km 溫度遞減率  $-9.8^\circ\text{K/km}$ ，0.8 km 以上溫度遞減率  $-6.0^\circ\text{K/km}$ ，相對濕度遞減率  $-7.5\%/km$ ，此溫濕剖面負區很小，舉升凝結高度約在 0.8 km。

地面相對濕度 85%，雲底相對濕度 95%，初期在山脊處有微量降水產生，圖 6 為 74 分鐘時的預報值，圖(c)為雨滴分佈，降水發生在山脊處，一部份則由山脈氣流往下游輸送， $u$  最大值為  $28\text{ m/s}$ ， $w$  最大值為  $8.07\text{ m/s}$ ，約位於背風處，山脈背風處的對流胞應為 Lee wave 上升氣流的一部份，因氣流迅速通過，因此水汽凝結不夠，因此沒有造成降水，模式積分至 1 小時左右在迎風面有一對流胞產生並逐漸移向山脈，可能由先前降水或無法越山氣流與環境風場輻合，圖 為 1 小時的預報場。模式從 66 分鐘至 80 分鐘在迎風面發生降水，圖 6(a) 為水汽混合比，最大值中心沿山坡向上移動，對流軸由原先的傾斜狀態逐漸垂直，約 72 min 時水汽混合比達最大值，且結構緊密，之後因降水使其發展高度降低，其組織亦被破壞，下降氣流並在背風面引起另一凝結

雲，圖 6(a) 為雲滴混合比時間變化圖，雲滴可透過碰併及捕捉過程形成雨滴，發展特徵與水汽混合比類似，在 74 分鐘達最大值，圖 6(b) 為雨滴混合比變化圖，雨滴在 67 分鐘形成於上升氣流上方，之後由於平均場的傳送將雨滴向山脊傳送，最大降水發生在山脊偏上游的地方，由於平均場風速較強將一部份雨滴自背風面傳送，不過降水仍在山脊附近，冰相粒子均在雲發展最大時產生，且都位於融解層上方，隨平均風場向山脊移動，由於山脈背風處有一因下降氣流引起的暖心，因此冰相粒子移入後均消散。風場變化 67 分鐘時迎風面有一微弱上升，背風下降氣流並不明顯，80 分鐘時，降水造成背方面的下衝氣流，其降水較小，此時期冰相粒子形成於高層，有複雜的雲物理過程，主要分佈在迎風面，雨滴則不斷在山脊產生，而在約 70 分鐘左右的較大降水使其有一極大值，雲滴，雪在最後時有最大值，這是在山脈背風面的對流雲造成的，圖 7 為水平雨量累積，由此可知雨量主要分佈在山脈附近，而背風面較迎風面多，此乃因山脊處的雨滴下降時，被平均場氣流往下游帶，造成背風面雨量較多，不過基本上山脈附近是雨量集中的地方。

## 五. 結 論 :

- (1) 半拉格朗日格式確可與地形結合，在古典理論測試中，半拉格朗日法均可模擬到其重要特徵，而座標應轉換到一矩形空間中，terrain following coordinate 是一合適的座標系統，一方面簡化程式的複雜度，也可增加模式的通用性。
- (2) 半拉格朗日法可與不同內插格式結合，內插的選取應避免耗散過大的格式，如線性內插其耗散極大，預報值太小，不適合用於中長期預報中，二次及三次內插兩者表現大致相同，二次內插其耗散仍存在，但並不大，若為省時可採用二次內插，三次內插較準確耗散也小，但較耗時。
- (3) 守恆性方面，由於半拉格朗日法具不同內插方法，因此其守恆性探討較複雜且困難，我們利用測試山脈時所計算的動能得知，動能耗散在三種方法，積分 16000 秒後其耗散均小於 3 % 左右，另外越高階內插其守恆性越好，線性內插最差，Cubic 內插耗散動能約 1.5 %，動能近似保守。

- (4) 半拉格朗日格式能在外流邊界上預報，由於內插值只與上游位移點有關，由測試可知在外流邊界上預報平流速度，可將水平向重力波，向外傳出。
- (5) 由山脈對流的模擬可知，山脈高度，底層水汽含量確可影響對流雲發展的強度及降水。
- (6) 山脈對流雲消散時，在山脊處產生的下降氣流將減小迎風面的上升氣流，切斷雲的發展，而在背風處則有 Lee wave 中的上升氣流，若地面為不穩定則易形成對流。
- (7) 降水主要在山脈附近，而背風面也會因山脊的強風而使降雨落在背風處。

## 六. 參考文獻:

- 曾忠一，1990：大氣模式之數值方法。
- 郭廷新，1991：半隱式半拉格朗日法在雲模式的應用。國立臺灣大學大氣科學研究所碩士論文。
- Durran, D.R., and J.B.Klemp, 1982a: The effects of moisture on trapped mountain lee waves. *J. Atmos. Sci.*, 39, 2490-2506.
- Durran, D.R., and J.B.Klemp, 1983: A compressible model for the simulation of moist mountain waves. *Mon. Wea. Rev.*, 111, 2341-2361.
- Klemp, J.B., and D.K.Lilly, 1978: Numerical simulation of hydrostatic mountain waves. *J. Atmos. Sci.*, 35, 78-107.
- Kuo, H.-C., and R.T. Williams, 1990: Semi-Lagrangian solutions to the inviscid Burgers equation. *Mon. Wea. Rev.*, 118, 1278-1288.
- Lin, Y.L., R.D.Farley and H.D.Orville, 1983: Bulk parameterization of the snow field in a cloud model. *J. Climate Appl. Meteor.*, 22, 1065-1092.
- Mahrer, Y., and R.A.Pielke, 1978: A test of an upstream spline interpolation technique for the advective terms in a numerical mesoscale model. *Mon. Wea. Rev.*, 106, 818-830.
- Scorer, R.S., 1954: Theory of airflow over mountains: III-Airstream characteristics. *Q.J.R. Meteorol. Soc.*, 80, 417-428.
- Staniforth, A. and J.Cote, 1991: Semi-Lagra

-ngian integration scheme for atmosphe  
-ric models--a review. Mon. Wea. Rev.  
, 119, 2206-2223.

Tanguay, M., A. Robert and R. Laprise, 1990 : A  
semi-implicit semi-Lagrangian fully  
compressible regional forecast model.  
Mon. Wea. Rev., 118, 1970-1980.

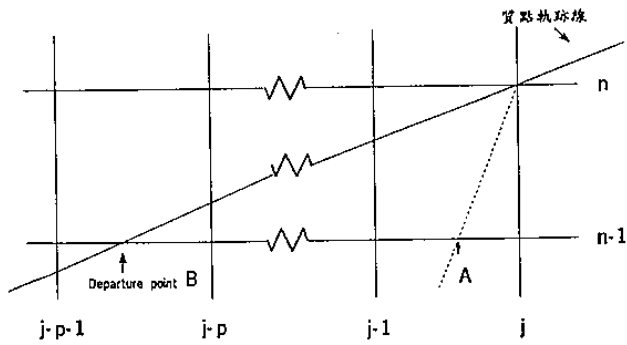


圖 1 : 半拉格朗日時間離散法, A 為尤拉法的內插點, B 為半拉格朗日法的內插點。

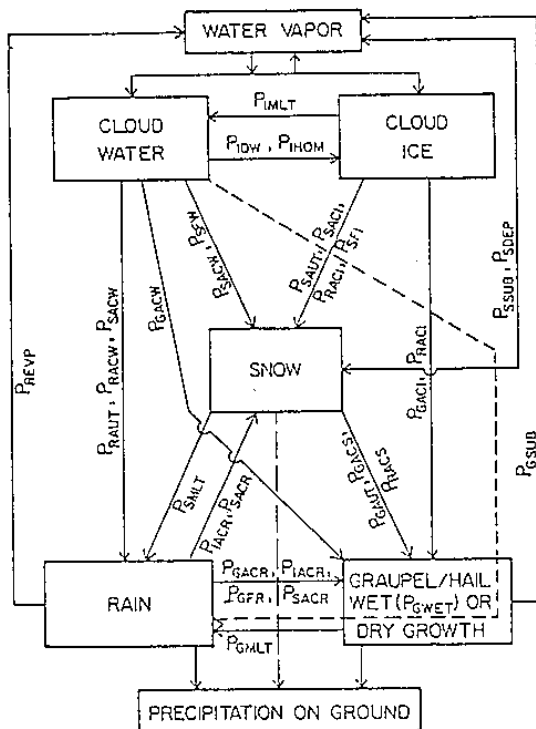


圖 2 : 模式採用的雲微物理交互作用示意圖。  
(Lin et al., 1983)

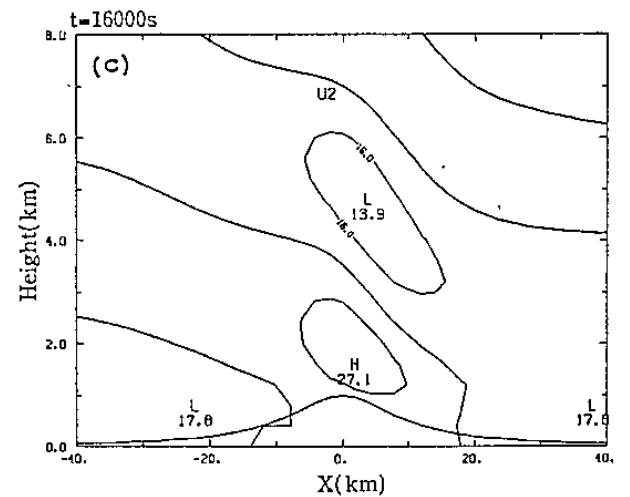
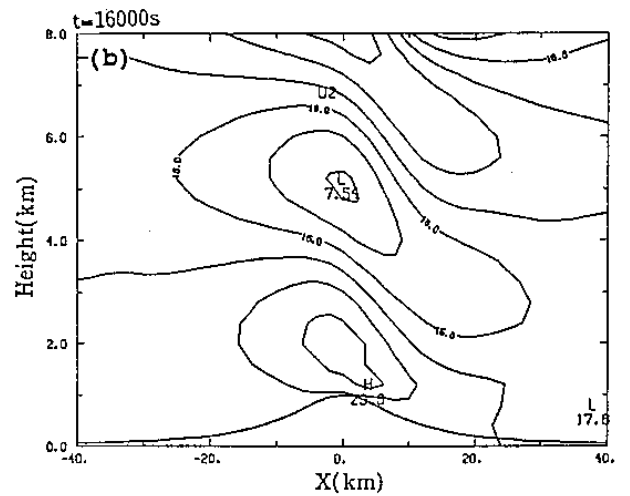
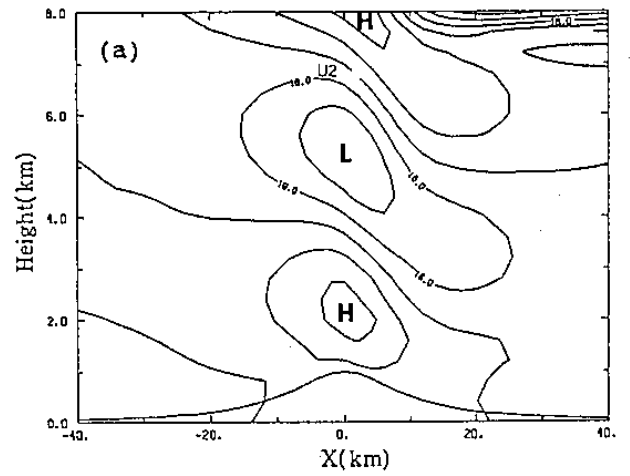


圖 3 :  $h=1$  km, 半拉格朗日法數值解, (a) Cubic 內插法. (b) Quadratic 內插法. (c) Linear 內插法.



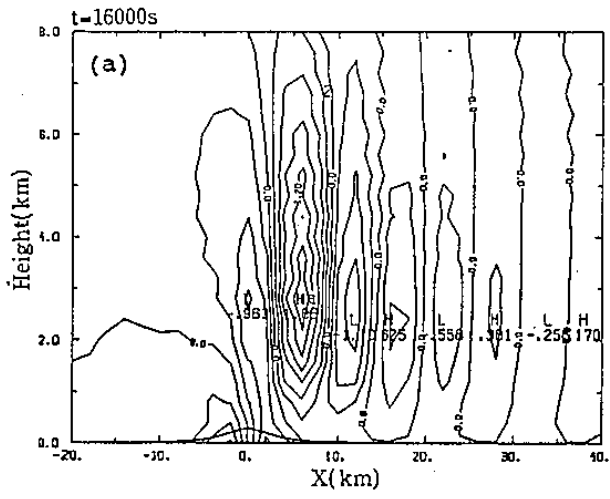


圖 4：兩層模式垂直速度數值解 (m/s)。

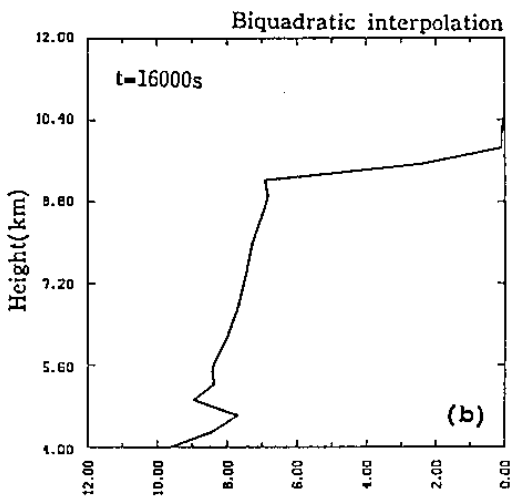
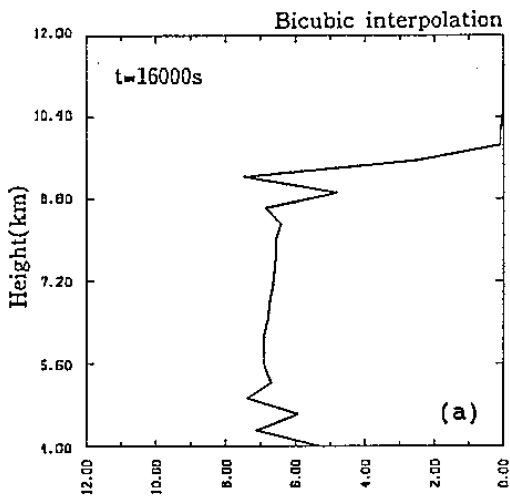


圖 5：h=1 km，半拉格朗日法垂直動量通量 (a) Cubic內插法。(b) Quadratic內插法。

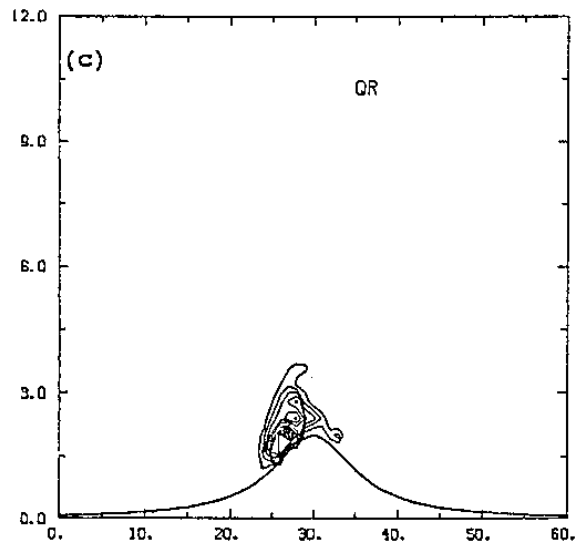
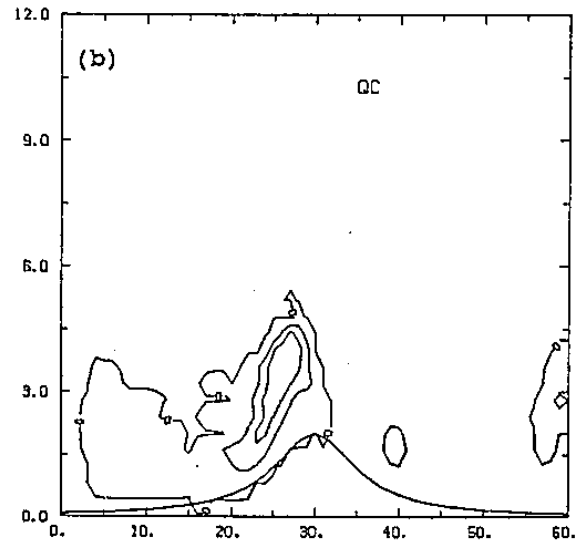
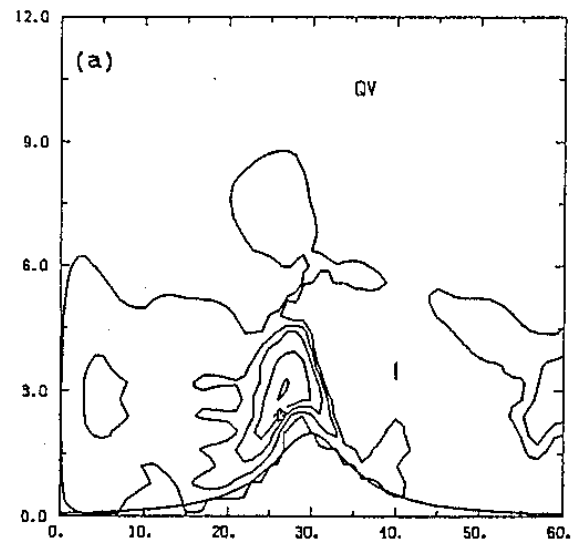


圖 6：山脈對流雲模擬第 74 分鐘預報值 (a) 水汽混合比，(b) 雲滴混合比，(c) 雨滴混合比。

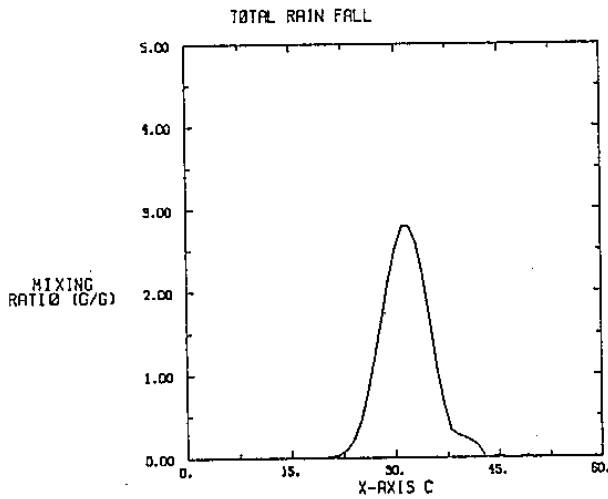


圖 7 : 地面累積雨量圖。

# A numerical study of the orographic effect in a cloud model by semi-Lagrangian method

Bo-shyong Chang \*

Chung-yi Tseng \*\*

\* Weather Center, CAF

\*\*Institute of Physics Academia Sinica & National Taiwan University

It is generally accepted that cumulus convection is one of the most complex atmospheric phenomena and couldn't be resolved by using conventional data sets owing to the scale consideration. Further understanding of the three dimensional structure in cumulus convection is not feasible until radar observation is involved. Meteorologists have recognized that cloud micro-physics and cloud dynamics processes strong interaction in nature since 1960s. Non-homogeneous thermal and/or dynamical produced circulation for instance orographic forced vertical motion, lee-side mountain wave etc. could be one of the mechanism causing convective weather. Therefore, It is ascertain that primitive governing equations with better descriptions on thermal dynamic processes, effective numerical method and parameterization are essential to the cumulus-convection numerical study.

Semi-Lagrangian method has been developed and studied for years. Using such method is advantage in several aspects. For example, it's stable, efficient and capable of tolerating larger time-step in numerical calculation, could be used in a moist and/or significant wind shear flow field. Even in a non-hydrostatic scheme, semi-Lagrangian has shown it's superiority.

We will use non-hydrostatic semi-implicit semi-Lagrangian method cloud model to introduce the non-linear effect causing by mountain which was not involved in a paralleled study by Tanguay(1990). The purpose of this study is to test the performance of semi-Lagrangian method with orographic effect through the classic mountain wave bases. It is also applied to simulate how convective initiated by mountain in unstable atmospheric environment.