

Smolarkiewicz 正定義數值方法中的交錯項

柳再明

中央氣象局

氣象資訊中心

郭鴻基

國立臺灣大學

大氣科學系

摘要

Smolarkiewicz (1982、1983、1984) 指出一數值平流方法應納入交錯項而未納入者是一不穩定法。我們針對 Smolarkiewicz 法交錯項加入與否、圓錐初始位置的改變、穩定度的探討以及邊界的影響進行多方面的測試。研究結果指出有納入交錯項的 Smolarkiewicz 法如 Smolarkiewicz 所言是一穩定的方法，而對於 Smolarkiewicz 法沒有加入交錯項的部份，只要注意 Δt 大小的使用及圓錐所在位置，雖然 Smolarkiewicz 法沒有納入交錯項，也會是一穩定的方法。

一. 引言

Smolarkiewicz (1982) 指出任何數值平流方法應加入交錯項 (cross-space partial derivative terms) 而沒有納入者，是一種不穩定的數值方法。Smolarkiewicz (1983, 1984) (文後以 S3 簡稱 Smolarkiewicz(1983)，以 S4 簡稱 Smolarkiewicz(1984)) 在其正定義 (positive definite) 水汽平流方法的基礎探討裏，指出沒有納入交錯項的平流結果，會因校正階段 (corrective step) 的重覆執行而產生額外的質量。本文針對 Smolarkiewicz 法中交錯項納入與否、初始圓錐所在位置及穩定度的改變，作多方面的測試。根據研究結果，我們明白顯示交錯項在 Smolarkiewicz 法裏所扮演的角色。文中第

二節陳述 S3 及 S4 文中有關交錯項的說明，第三節是研究結果及討論，結論則放在第四節。

二. 交錯項

作二維以上的平流測試問題時，所使用的數值平流方法才會面對交錯項的問題，作一維平流測試沒有交錯項的困擾。以下以二維平流方程式(A)

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial(uF)}{\partial x} + \frac{\partial(vF)}{\partial y} = 0 \quad (A)$$

來說明為何會有交錯項的存在。當我們對(A)式做定

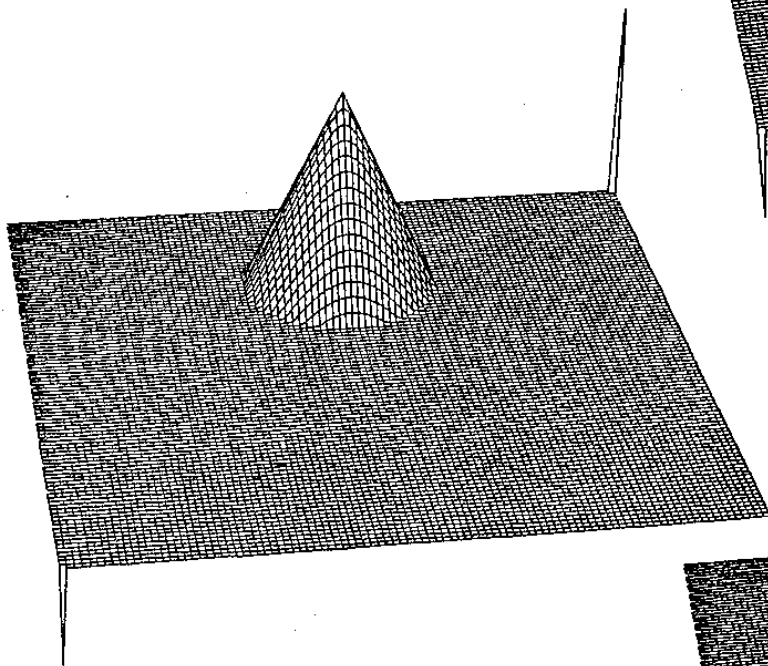
差化， F 變數的時間預報項 $F_{i,j}^{n+1}$

$$F_{i,j}^{n+1} = F_{i,j}^n + \Delta t \frac{\partial F}{\partial t} \Big|_{i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \Big|_{i,j}^n \quad (B)$$

以泰勒二階展開，(B)式中的時間導式項 $\frac{\partial F}{\partial t}$ 及 $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}$ ，我們借用(A)式來替換，暫且讓 u, v 為常數，則可得(C)式

$$F^{n+1} = F^n + u \Delta t \frac{\partial F}{\partial x} + v \Delta t \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{1}{2} u^2 \Delta t^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{1}{2} v^2 \Delta t^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + uv \Delta t^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (C)$$

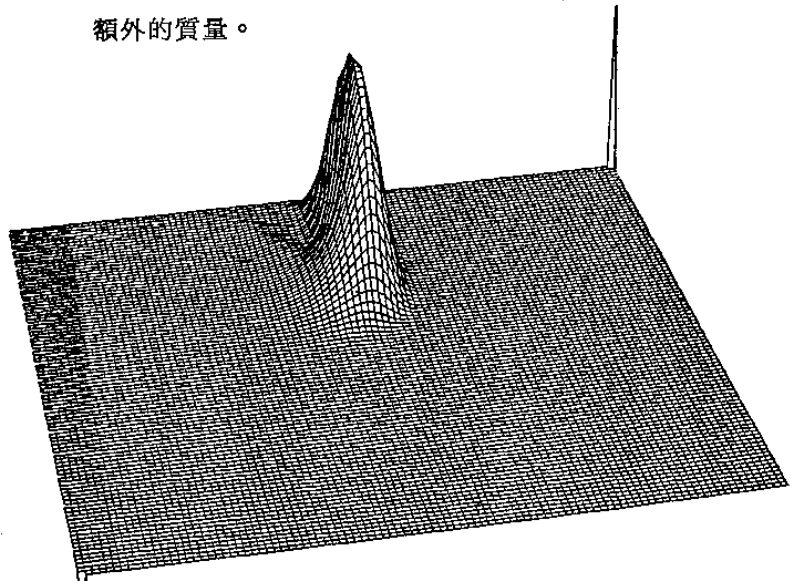
(C)式等號右邊的最末項 $uv \Delta t^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ 就是所謂的交錯項。而所謂Smolarkiewicz法及其與交錯項的關係，請參考Smolarkiewicz(1983,1984)。圖一是S3用來測試其平流方法的圓錐，測試範圍 $(100\Delta x, 100\Delta y)$ ， $\Delta x = \Delta y = 1$ ， $\Delta t = 0.1$ ，角速度 $\omega = 0.1$ ， $u = -\omega(y - y_0)$ ，



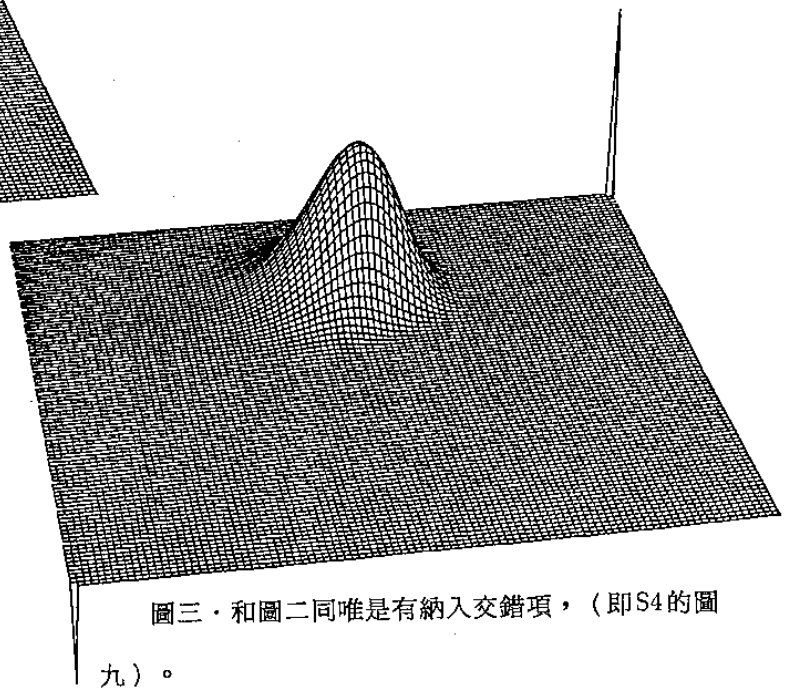
圖一·初始圓錐場，右上角標高是1，左下角標高是-0.5。(即S3的圖一)

$v = \omega(x - x_0)$ ， $(x_0, y_0) = (50\Delta x, 50\Delta y)$ 。所測試範圍中 $\max. CFL \text{ no.} = (u^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} + v^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta y^2})^{\frac{1}{2}} \approx 0.7$ 。圓錐

繞一圈共執行628次積分。圓錐半徑 $15\Delta x = 15\Delta y$ ，圓錐高是1，位於 $(50, 25)$ (原點在右上角)。圖一-右上角標高是1，左下角標高是-0.5。圖二(即為S3的圖十二)，是經二次校正，沒有納入交錯項圓錐繞六圈的結果，圓錐中心極值為1.212(也見圖五)，較初始圓錐(圖一及圖四)的極值1多了21.2%。S3的解釋是，沒有納入交錯項時，重覆校正階段會放大沒有納入交錯項所衍生的缺點而產生額外的質量。加入交錯項後(見圖三，即為S4的圖九)就不會產生額外的質量。



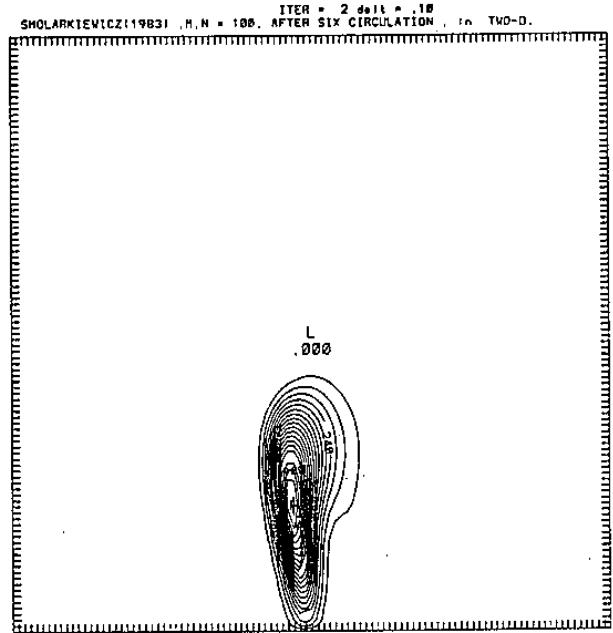
圖二·校正階段執行兩次，圓錐繞6圈的結果(沒有納入交錯項)，即S3的圖十二)。



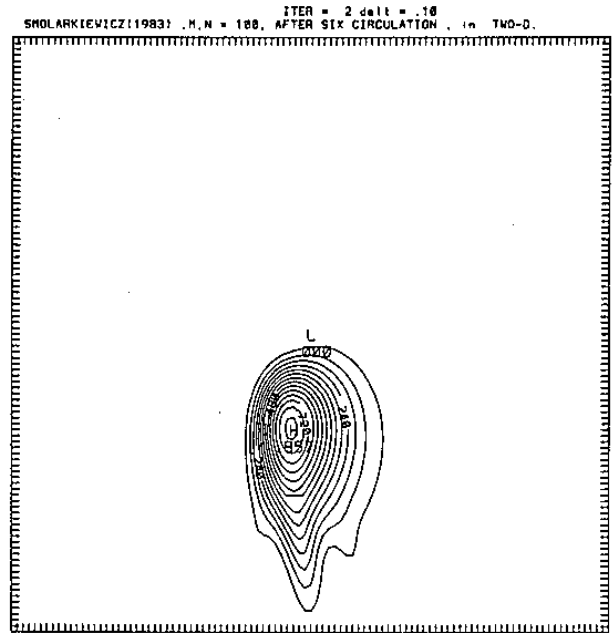
圖三·和圖二同唯是有納入交錯項，(即S4的圖九)。

三. 測試結果及討論

由圖二沒有交錯項會有不穩定的結果，及有交錯項圖三的穩定結果，似乎顯示Smolarkiewicz (1982,1983,1984) 的論點“應加入而沒有納入交錯項的數值平流方法，是一不穩定的方法”是對的。然而圖五圓錐繞6圈後，圓錐不但變長形且已接觸到邊界（對照圖四圓錐初始形狀及位置）。由圖五（即S3的圖十二）的結果，我們有理由相信Smolarkiewicz(1983)的圖十二包含了邊界效應，可能是圓錐過於靠近邊界（圓錐中心位於(50, 25)，圓錐半徑15，零值線離邊界僅10個網格點）加上圓錐繞6圈執行時間過長，導致圖五無法免除邊界的問題。我們將圓錐往中心移8個網格（圓錐中心位置在(50, 33)其他變數保持不變，繞6圈後的結果為圖六，圓錐沒有產生額外的質量，中心強度0.857。雖然沒有納入交錯項，然而在圖六的運算環境下不會如圖五產生額外的質量。由圖五及圖六，我們已有足夠的理由懷疑Smolarkiewicz (1982,1983,1984) 所指出“應加入而沒有納入交錯項的平流方法是一不穩定法”的論點是否全然正確。圖六將圓錐移離邊界

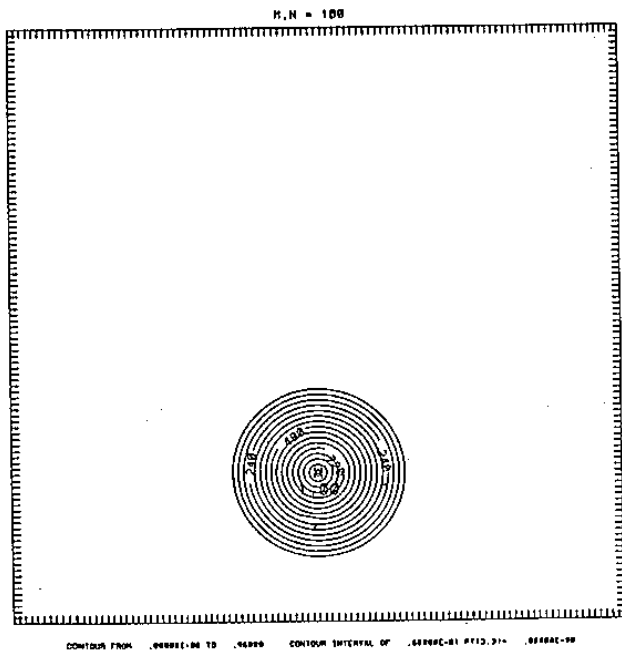


圖五·即圖二的二維繪圖法，中心極值1.212。



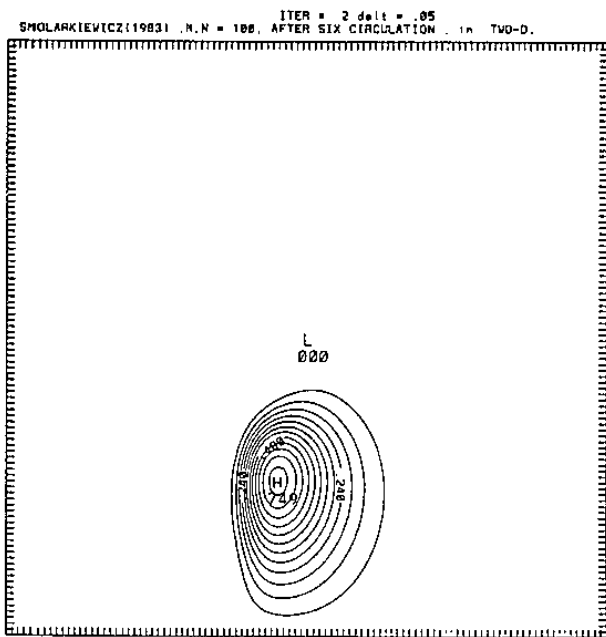
圖六·和圖五同，唯圓錐中心位置往上移為(50, 33)。

的效果，除了比圖五較少受邊界的影響（文末圖十二清楚的指出何種狀況的結果才沒有受邊界的影響），也改變圓錐所在位置的風速，亦即圓錐中心比圖五有不同的CFL no.（圓錐中心之CFL no.我們稱之為local CFL no.）。圖六是改變兩樣（遠離邊界及減少local CFL no.）的結果，圖六或許只比圖五少受邊界的影響，但仍受邊界的影響，或許圖六的結果全然是local

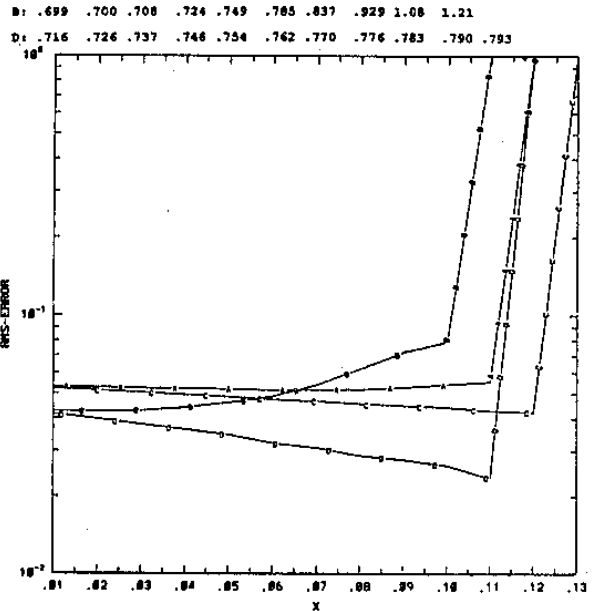


圖四·初始圓錐場（即圖一之二維繪圖法），原點在左下角，測試範圍(100, 100)。

CFL no. 減小的緣故。圖六的結果是受何者左右，或是兩者的共同結果，我們暫且不知，而 local CFL no. 在圓錐測試中扮演何種角色，這些疑問都是本文所要探討的重點。圖五圓錐變長形及圖六圓錐下緣有類似魚尾巴狀的圖形，似乎顯示二者有不穩定的現象，二者都使用 $\Delta t = 0.1$ ，max. CFL no. ~ 0.7 ，我們懷疑 S3 使用的 Δt 是否太大。圖七即是 Δt 由 0.1 減少為 0.05，而圓錐位置和圖五一樣都較靠近邊界，圖七裏圓錐中心強度 0.749。圖七或許仍受邊界的影響，（圓錐變長且和邊界相當接近）但是只要降低圓錐中心的 CFL no.，雖然沒有加入交錯項，也不會如 S3 所言重覆校正階段產生額外的質量。圖六及圖七共同指出，對於沒有納入交錯項的狀況，要注意其 local CFL no. 大小的使用，圖六的 local CFL no. 由圖五的 0.25 降為 0.17，圖七則降低為 0.125，二者同時指出使用較小的 local CFL no. 沒有納入交錯項也不會產生額外的質量。至此，經由上述的分析雖然還有許多疑點企待我們去探討，（如 local CFL no. 和 max. CFL no. 在圓錐的測試

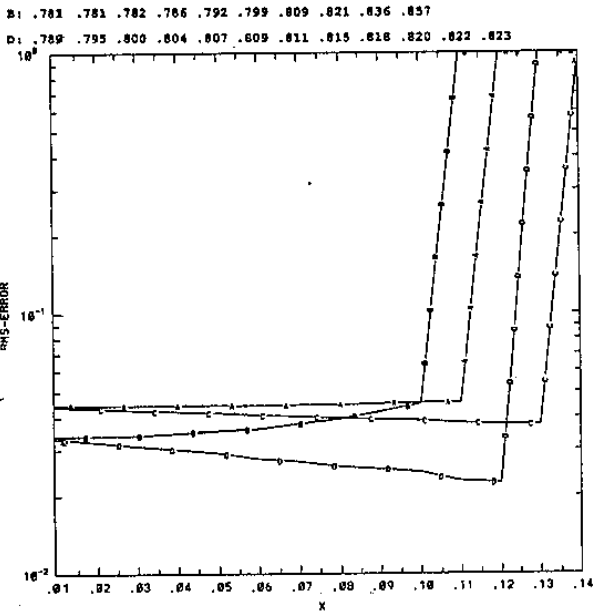


圖七·和圖五同，唯 $\Delta t = 0.05$ 。



圖八·x 軸是 Δt ，A、B 線是無交錯項經一、二次校正，C、D 線是有交錯項經一、二次校正的穩定度測試。圓錐位於 (50, 25)，圖上端兩行數字是 B、D 線圓錐繞 6 圈後中心的極大值。

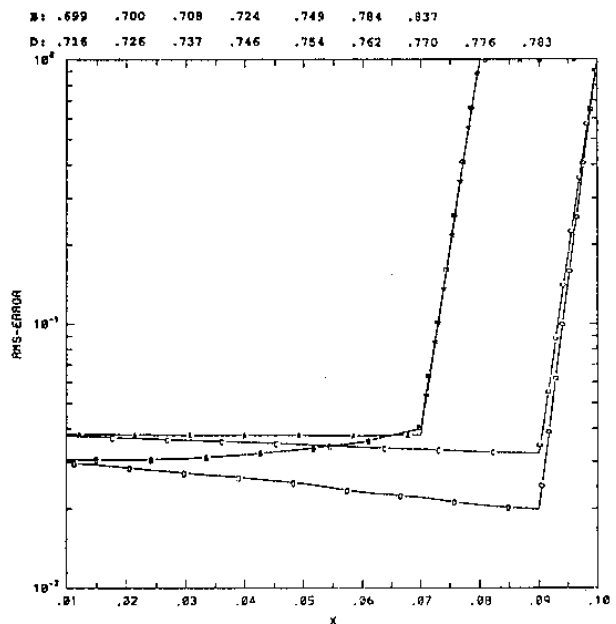
中是代表何種意義，以及如何免除邊界的效應），但我們已全然相信，一應納入交錯項而未加入的數值平流方法，只要使用較小的 local CFL no.，不會是一不穩定法。圖三納入交錯項就可以免去圖二沒有加入交錯項會產生額外質量的結果，似乎告訴我們有交錯項比沒有交錯項有較寬的穩定度限制，納入交錯項後穩定度限制可能變大。圖八是有無交錯項穩定度的測試，x 軸是 Δt ，A、B 線是沒有交錯項經一、二次校正的結果，C、D 線是有納入交錯項經一、二次校正的結果。圖八清楚的指出三個特點，一是當使用很小的 Δt （如 $\Delta t = 0.01$ ），沒有交錯項的 B 線和有交錯項的 D 線得到近乎相同的精確度。在數值天氣預報作業的單位，為了作業的穩定性，常使用較小的 Δt ，由圖八可知在較小 Δt 的情況下，有無交錯項，結果幾乎沒有差別。二是在最大可使用 Δt 方面，有交錯項 D 線的 $\Delta t_{max} = 0.11$ ，比沒有交錯項 B 線的 $\Delta t_{max} = 0.1$ 略大，有納入交錯項的比沒有交錯項的有較寬的穩定度限制



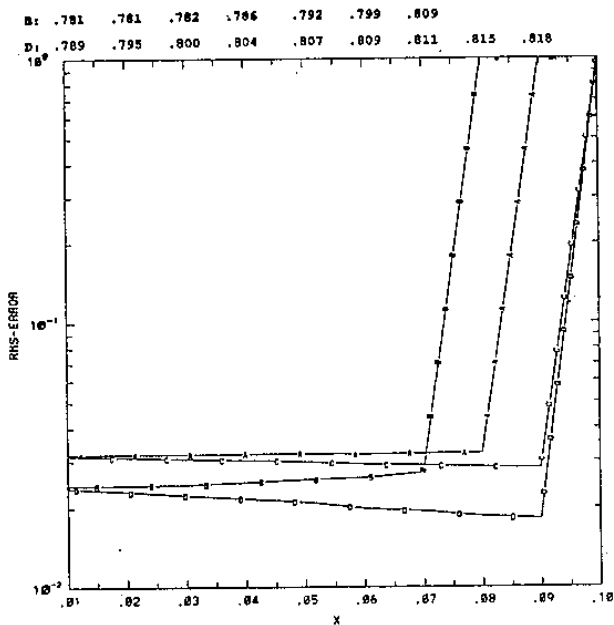
圖九·和圖八約同，唯圓錐位於(50, 33)。

。第三個特點是，正常而言，多一次校正的結果會比上一個的結果有更好的精確度，如二次校正的D線比一次校正的C線誤差來得小，然而沒有交錯項二次校正的B線比一次校正的A線，在 $\Delta t \geq 0.07$ 明顯的有較大的誤差。沒有納入交錯項在 $\Delta t \geq 0.07$ ，隨著 Δt 的變大，受邊界的影響也愈大。所以誤差也變大，有納入交錯項的，不論用多大的 Δt ，似乎都不受邊界的影響（有無交錯項者受邊界影響情形，待文末的圖十三，圖十四再細談）（圖八上頭兩行數字是無交錯項B線及有交錯項D線圓錐極值，由這兩行數字可清楚的看出，B線在 $\Delta t=0.06$ 、 0.07 附近圓錐中心極值就有大幅跳升的現象，顯示在 $\Delta t \sim 0.06$ 或 0.07 附近邊界的影響就很明顯了，而有交錯項的D線其圓錐中心極值呈現很平穩的上升，顯示有交錯項似乎比較不受邊界影響）。另外B線 $\Delta t_{max}=0.1$ ，正是S3圖十二所使用的 Δt 。沒有納入交錯項的B線，其 $\Delta t=0.1$ 的結果受邊界的影響最多，且在穩定區的邊緣呈極不穩定，是最壞的結果。以沒有納入交錯項者而言， $\Delta t=0.1$ 是最不具代表性的，應以 $\Delta t \leq 0.05$ 的來代表無交錯項者。圖八顯示納入交錯項後絕對是一穩定的方法，然而在

沒有加入交錯項時，注意其local courant no.不可太大，雖然沒有納入交錯項也會是一穩定的方法。圖九大約和圖八相同，唯圓錐較圖八遠離邊界8個網格點在(50,33)處，較圖八少受邊界影響一些。因為受邊界影響程度不同，所以圖九呈現和圖八幾個些許差異的特點。一是在 Δt 很小時，有無交錯項二者的差別並不大（圖八也指出此點）。二是有交錯項的D線（ $\Delta t_{max}=0.12$ ）比沒有交錯項的B線（ $\Delta t_{max}=0.1$ ）有較寬的穩定度限制，此特點和圖八類近，唯一不同的是，圖九D線的 $\Delta t_{max}=0.12$ 比圖八D線的 $\Delta t_{max}=0.11$ 稍大（ Δt_{max} 的大小對同一數值方法而言，應只受限於max.CFL no.圖八、九有相同的max. CFL no.其 Δt_{max} 對同一條線而言應相同，然而二圖在計算精確度的些微差異，所以C、D線的 Δt_{max} 有些許不同）。三是二次校正的結果（B、D線）比一次校正的結果（A、C線）有較佳的精確度（此特點和圖八不同，圖八因為受邊界影響較大， $\Delta t \geq 0.07$ 沒有交錯項部分二次校正的B線比一次校正的A線有較大的誤差

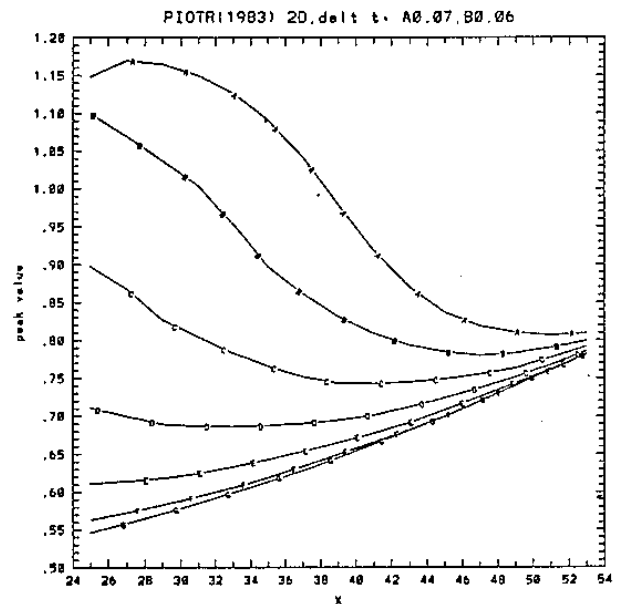


圖十·和圖八同，唯測試範圍由圖八的 100×100 放大到 140×140 。



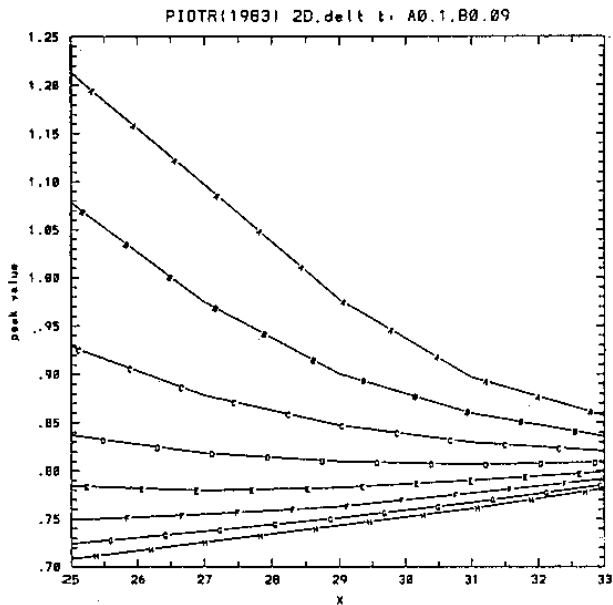
圖十一·和圖九同，唯測試範圍由圖九的 100×100 放大到 140×140 。

由圖八及圖九的B線二者都共同指出 $\Delta t \geq 0.07$ 圓錐已受邊界很大影響（由二圖上方圓錐中心極值的大幅跳升可知）。擴大測試的範圍，應可減少邊界的影響，圖十及圖十一即是將圖八及圖九東西南北方各增加 20 個網格點，其餘部份圖十和圖八約同、圖十一和圖九大約相同。比較圖八及圖十，很明顯的因為二圖的 max. CFL no. 不同，所以就B線而言，圖八的 $\Delta t_{max} = 0.1$ 而圖十的 $\Delta t_{max} = 0.07$ ，圖十的 max. CFL no. 較圖八為大，所以對同一數值方法而言，圖十所能用的 Δt_{max} 比圖八來得小。另外由圖十及圖八二圖上方兩行圓錐中心極值，我們發現對同一條線，相同的 Δt 有相同的圓錐中心極值。圖八及圖十唯一相同的是有相同的 local CFL no.，因此我們得知，一般而言圓錐測試的精確度對同一數值方法，只和 local CFL no. 相關，而 max. CFL no. 則只關係著 Δt_{max} 的大小。另外由圖十、圖十一，二圖上頭兩行圓錐中心極值似乎指出，圓錐初始位置愈靠近測試範圍的中心，測試結果精確度愈高，也就是說 local CFL no. 愈小，測

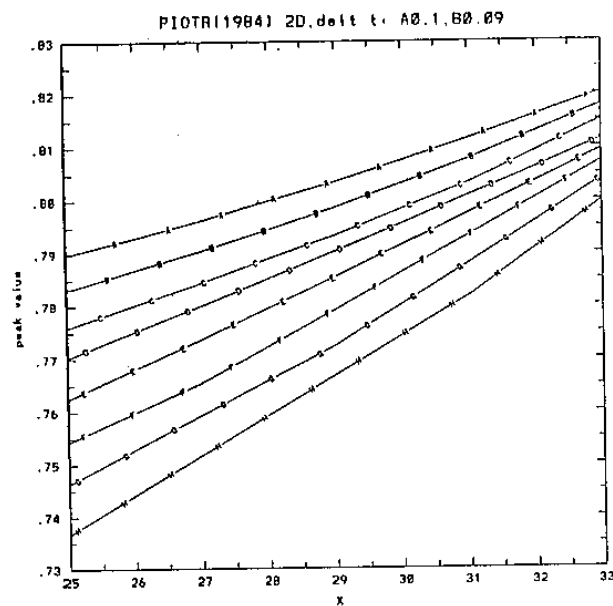


圖十二·x軸指圓錐中心離邊界的點數，y軸指圓錐中心極值，A至G線分別表所使用 $\Delta t = 0.07$ 、 0.06 、...、 0.01 測試範圍為 140×140 ，為沒有納入交錯項，圓錐繞 6 圈的結果。

試結果，圓錐中心極值愈佳。圖十二是 140×140 的測試範圍沒有納入交錯項，圓錐繞 6 圈，x 軸為圓錐中心距邊界的點數，y 軸為圓錐中心極值，A、B、...G 為 $\Delta t = 0.07$ 、 0.06 ... 0.01 的測試結果。當使用較小的 Δt （如 $\Delta t = 0.01$ 的 G 線），圓錐由測試範圍的内部往外移精確度漸減，圓錐中心極值幾乎呈線性遞減，然而當使用較大的 Δt （如 D 線 $\Delta t = 0.04$ ），起初圓錐中心極值隨圓錐外移仍下降，後來圓錐過於接近邊界，受到邊界的影響在 $x \leq 31$ ，圓錐中心極值不減反增，當使用最大的 $\Delta t (= 0.07)$ ，則在 $x \leq 49$ 就受到邊界極大的影響，圓錐中心極值即大幅跳升。圖十二似乎是檢驗圓錐測試結果是否受到邊界影響的絕佳方法，圓錐中心極值的大小，隨 local CFL no. 的增加會降低，只有圓錐的測試結果受到邊界反射的影響、圓錐中心極值的大小才會增加。圖十三和圖十二大約相同。唯是 100×100 較小的測試範圍，A、B...、H 線是 $\Delta t = 0.1$ 、 0.09 、... 0.03 的測試結果。當 $\Delta t \geq 0.08$ (A、



圖十三·和圖十二約同，唯A至H線表所使用 $\Delta t=0.1、0.09、0.08 \dots 0.03$ ，測試範圍為 100×100 。



圖十四·和圖十三約同，唯是有納入交錯項。

B、C線)不論圓錐擺在測試範圍的何處，圓錐中心極值都受了邊界影響，隨 local CFL no. 增加而增加， $\Delta t=0.1$ 的A線，其 $x=25$ 正是S3圖十二所使用的 Δt 及圓錐所在位置，是極受邊界反射影響很不好的結果。圖十三也指出若要使用Smolarkiewicz不納入交錯項的方法，必須 $\Delta t \leq 0.05$ (F、G、H線)，才能使測試結果免除邊界的干擾。圖十四和圖十五約同，唯圖十

四是有納入交錯項，圖中顯示，當Smolarkiewicz法納入交錯項後無論 Δt 的使用大小及圓錐位於測試範圍何處，都不受邊界影響，絕對是一穩定的數值平流方法。

四. 結論

Smolarkiewicz(1982,1983,1984) 指出一數值平流方法應納入交錯項而未納入者是一不穩定法。同時也說明當Smolarkiewicz法未加入交錯項時，校正步驟不可重覆執行，因為重覆執行會擴大未加入交錯項的缺點而產生不穩定。我們針對Smolarkiewicz法交錯項加入與否、圓錐初始位置的改變、穩定度的探討以及邊界的影響進行多方面的測試。研究結果指出有納入交錯項的Smolarkiewicz法如作者所言是一穩定的方法，而對於Smolarkiewicz法沒有加入交錯項的部份，只要注意 Δt 大小的使用及圓錐的所在位置，雖然Smolarkiewicz法沒有納入交錯項，也會是一穩定的方法。

上一節在Smolarkiewicz交錯項特性的研究探討中，有幾點重要的結論，茲摘錄如下。

(1) Smolarkiewicz法納入交錯項比沒有加入交錯項有較寬的穩定度限制，亦即當有相同的解析度，有交錯項者比沒有交錯項者可以使用較大的 Δt (約大29%)。

(2) 當使用很小的 Δt 時 (CFL no. 很小)，有無交錯項的結果很相近，二者有近乎相同的精確度。

(3) Smolarkiewicz法沒有加入交錯項者比有納入交錯項者較易受邊界的影響。

(4) max. CFL no. 關係到一數值方法所能使用的 Δt_{max} ，local CFL no. 則和圓錐測試結果的精確度及中心極值相關。

(5)split的執行方法，會包含交錯項的效應，可以免除交錯項納入與否的困擾。

一般天氣系統的幅合帶其風速都較大，250mb的噴流，風速可達80m/s左右。經由本文的測試，我們知道在有限差分預報模式中，風速愈大，數值誤差也愈大。有限差分模式常使用較小的 Δt ，原因除了CFL的限制外，也考慮風速大數值誤差大的數值結果。經由深入的探討，對於Smolarkiewicz交錯項的特性及如何使用Smolarkiewicz法，我們有更深一層的認識。另外，沒有納入交錯項的Smolarkiewicz法在三階以上，因為計算項數較少，可以節省不少電腦運算時間。

參考文獻

- Smolarkiewicz, P.K., 1982: The multi-dimensional Crowley advection scheme. *Mon. Wea.Rev.*, 110,1968-1983.
- Smolarkiewicz, P.K., 1983: A simple positive definite advection scheme with small implicit diffusion. *Mon. Wea. Rev.*, 111, 479-486.
- Smolarkiewicz, P.K., 1984: A fully multidimensional positive definite advection transport algorithm with small implicit diffusion. *J. Comput. Phys.* 54,352-362.

The cross-space partial derivative terms to Smolarkiewicz positive definite scheme

Tzay-Ming Leou

Center Weather Bureau

Computer Center

Hung-Chi Kuo

National Taiwan University

Dept. of Atmospheric Science

ABSTRACT

Smolarkiewicz (1982、1983、1984) pointed out that the numerical advection scheme has not include the cross terms which should include originally is an unstable scheme. We had dealed so many tests about the Smolarkiewicz method of cross terms included or not、the position of cone、stability and boundary effects. Research results show the Smolarkiewicz method have cross terms is a stable scheme but care both the magnitude Δt and the position of cone without cross terms Smolarkiewicz method is also an stable scheme.