

積雲樣本模式捲入率之探討

鄭明典

中央氣象局資訊中心
台北市公園路64號

摘要

Arakawa-Schubert 積雲參數法的計算瓶頸之一是波譜積雲樣本的使用步驟。如果將積雲樣本模式有關質量通量的垂直分佈假設，由指數圖型改成線性分佈，則此計算步驟便可大為簡化。本文討論指數分佈及線性分佈模式的計算步驟及物理特徵，並提出一個最適當的模式結構，以供積雲參數化之用。

一、前言

積雲參數化的問題是大氣數值模式發展上的一大瓶頸，以目前電腦發展的趨勢來看，短期內將無法避免這個問題所衍生的困擾。而綜觀現行各種積雲參數化理論，以物理概念上的清晰度及完整性來說，Arakawa-Schubert (A-S)參數法 (Arakawa and Schubert, 1974) 是其中較特出者。因此，以長期發展的立場來看，A-S參數法應當是最具發展潛力的了。

最原始的A-S參數法在計算上相當費時，直到最近，在改進計算效率上才較有具體的進展，其中又以Moorthi and Suarez(1992)的relaxed方法及Randall的prognostic方式最為成功。其基本上，原始的A-S參數法在計算上有兩處瓶頸，首先最求積雲的質量捲入率，其次是解雲底質量通量分布函數的過程。本文將針對第一個問題瓶頸，探討其之所以計算費時的原因，並討論Moorthi and Suarez(1992)所提解決方案的特點。對原始模式計算過程的討論將列在第二節。第三節將討論可行的解決方案及我們認為最合適的方案。第四節為針對不同積雲樣本模式進行半預報測試的結果。第五節則為結論。

二、原始積雲樣本模式

A-S參數法包含積雲樣本模式及雲功函數

準平衡假設兩大部份。對積雲樣本模式的結構，Arakawa and schubert (1974)假設積雲相對捲入率

$$\lambda \equiv \frac{1}{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial Z} \quad (1)$$

為常數，其中 η 為以雲底質量通量常化之積雲質量通量，在雲底 $\eta = 1$ 。由 (1)式的垂直積分可得

$$\eta_T = e^{\lambda(Z_T - Z_B)} \quad (2)$$

其中 Z_T 和 Z_B 分別為雲頂及雲底的高度。實際運算時，為求能量及質量守恆的一致性，通常(2)式是不用的，而使用

$$\eta_i = \eta_{i+1} (Z_i - Z_{i+1}) \lambda \quad (3)$$

其中 η_i 及 η_{i+1} 分別是 η 在高度 Z_i 及 Z_{i+1} 處的值，而 Z_i 及 Z_{i+1} 分別為模式第 i 及 $i+1$ 層的高度 $Z_i > Z_{i+1}$ 。為決定 λ 的值，A-S 還假設在雲頂處熱浮力為零。為方便我們將此雲頂條件寫成

$$h_T = \bar{h}_T^* \quad (4)$$

其中 h_T 為雲頂之溼靜能， h_T^* 則為零浮力條件的溼靜能值。根據對「熱浮力」的定義， h_T^* 的型式可能有所不同，在此我們將 h_T^* 視為一已知量。

相對於(3)式，在此不連續系統下，雲的溼靜能守恆可寫成

$$h_i = [h_{i+1} + \eta_{i+1}(Z_i - Z_{i+1})\lambda \bar{h}_{i+\frac{1}{2}}] / \eta_i \quad (5)$$

其中 $h_{i+1/2}$ 為環境在 Z_i 及 Z_{i+1} 之間的平均溼靜能，在此假設 h 在雲底的值為已知。由(5)式可看出，要計算 h_i 的值必須先有 λ 及 η 的值。因此，使用(5)式求積雲溼靜能的標準步驟為先給定一初始猜測的 λ 值，然後同時求解(3)及(5)式，此步驟必須由雲底由下往上一層層的積分上去。而等到雲頂 h_T 值求得後，通常初步計算的 h_T 值無法滿足(4)式，此時便需改變 λ 的值，從新再由雲底往上積分一次，這種反覆運算的運程，使得求解 λ 值的計算步驟非常的不經濟。

如果在考慮雲頂條件(4)時，要加入雲滴的作用時，則雲的水汽收支及降水參數化過程也要在反覆運算的過程中同時計算。這包括計算雲的(飽合)比溼

$$q = \bar{q} + \frac{\gamma}{L(1+\gamma)}(h - \bar{h}) \quad (6)$$

其中 $\gamma = (L/C_p)(q/T)_p$ ， C_p 為空氣定壓熱容， L 為水汽凝結之潛熱， q^* 及 h^* 為環境之飽合比溼及飽合溼靜能。其次計算未降水前之雲滴混合比

$$\ell_i = [q_{i+1} + \ell_{i+1} + \eta_{i+1}(Z_i - Z_{i+1})\lambda \bar{q}_{i+\frac{1}{2}}] / \eta_i \quad (7)$$

其中 q_{i+1} 為 q 在 Z_{i+1} 之值， ℓ_{i+1} 為雲滴混合比在 Z_{i+1} 之值， $\bar{q}_{i+1/2}$ 為環境在 Z_i 和 Z_{i+1} 之間的平均比溼。在此我們也假設雲底 q 和 ℓ 的值為已知。通常降水率參數化成

$$R = C_0 \eta \ell \quad (8)$$

其中 C_0 為降水的自動轉換系數。由(8)，我們得到

$$\ell_i = \ell_i' - C_0 \eta_i \ell_i \Delta Z_{i+\frac{1}{2}} \quad (9)$$

由(9)式可解出

$$\ell_i = \frac{\ell_i'}{1 + C_0 \Delta Z_{i+\frac{1}{2}}} \quad (10)$$

如果水的冰相也要考慮到(4)式的條件之中，則雲內的溫度要以下式估算，

$$T = \bar{T} + (h - \bar{s} - Lq) / C_p \quad (11)$$

其中 T 為環境的溫度， s 為環境的乾靜能。此外還要根據水相參數化理論，由溫度判斷冰相的存在並將其作用加入溼靜能的收支方程之中。以上這些計算式若是全部加入求解 λ 的反覆運算過程中，更會使此積雲樣本模式的使用，增加約五倍於僅考慮溼靜能收支求 λ 值的計算時間。

三、積雲樣本模式的演變

A-S 假設積雲相對捲入率 λ 為常數，乃是根據早期煙流的實驗結果而來。通常煙流的相對捲入率和煙流的直徑有很好的反比關係，如果把個別積雲比照成煙流，則因積雲的截面積隨高度的變化有限， λ 為常數應是個很合理的近似。

近年來，越來越多的飛機觀測，發現積雲捲入率並未如煙流理論所預測的，在積雲大小和相對捲入率之間並沒有明顯的反比關係。尤其是對於淺積雲的研究，更發現主要的捲入過程可能是發生於雲頂，而非煙流理論上所談的側向捲入。於是積雲模式的捲入率再次成爲一個多方討論的議題。有人認爲積雲模式應該完全放棄側向捲入的觀念，而只考慮雲頂捲入混合的作用。這個論調對淺對流或層狀對流雲可能適用，對深積雲則甚爲可議，因爲觀測上甚少

發現完全未與環境混合的深對流雲。

在A-S積雲參數法中，由於使用的是波譜積雲樣本模式，參數化的結果是整個積雲波譜作用的總合，因此對個別積雲樣本的合理性要求，僅在於其是否足以表達最後總合作用的合理性。在此，由於雲功函數率平衡才是決定積雲質量通量波譜分佈的關鍵，經驗上個別積雲模式的差異似乎並沒有絕對的重要性，例如Lord(1978)將積雲側向捲出的實驗，便沒有發現顯著的作用。這種現象有點類似利用傅利葉函數的波譜分析法，雖然個別正、餘弦函數乃人為設定的分佈，但追蹤個別函數的變化再做合成，最後的結果卻有其物理變化的意義。我們也有理由相信，縱使個別積雲樣本模式，與觀測比較可能不甚具有代表性，但在雲功函數率平衡的限制下，最後結果可以是合理的。但是何種模式為可用而何種為不可用，目前則無法直接判定，必須經由測試而做間接的分析。

由於目前對積雲捲入發生過程的所知有限，在探討積雲參數化問題時，我們仍傾向於將捲入率看成一個參數，而不去探究相關的物理問題。在這個觀點下，我們對捲入率的合理性定義為「不違反直覺上的可能性」。λ為常數是可能的，只有雲頂捲入也是可能的，而Moorthi and Suarea(1992)假設捲入率（非相對捲入率）為常數當然也是可能的合理假設。接下來，除了合理性外，我們所能考慮的便是方便性及前述的，是否最終結果能表現合理的積雲作用了。

在第二節中我們說明了原始積雲樣本模式之所以計算費時的原因，主要是求解λ時需要反覆運算的過程，而且每次運算均要由雲底往上一層層的積分上去。為了簡化這些計算步驟，雲滴懸浮及冰相水對熱浮力的作用常常是最先被忽略的物理量，如此，(4)式中hT**的值便可直接由環境的探空求得，而可視為一已知量。要解決反覆運算的不便，基本上我們希望除雲底外各層的質量捲入量維持固定的比例，使捲入環境空氣的平均熱力學特性成為一已知量，則雲頂的溼靜能便只是雲底溼靜能和平均捲入溼靜能的線性組合，捲入率的決定就不再需要經過反覆運算的過程了。

現在我們以Moorthi and Suarez(1992)所提方案為例作說明。他們假設

$$\frac{\partial \eta}{\partial Z} = \mu = constant \quad (12)$$

其中μ便是捲入率。以(12)式和(1)做比較，便可看出兩者的差異。為方便起見，我們稱μ=常數的模式為「線性模式」，而稱原始λ=

常數的模式為「指數模式」。積分(12)式可得

$$\eta_i = 1 + \mu(Z_i - Z_B) \quad (13)$$

線性模式的特點在於溼靜能守恆方程的簡單，相對於(13)式的溼靜能守恆可寫為

$$h_i = \frac{1}{\eta_i} [h_B + (\eta_i - 1)\bar{h}_i] \quad (14)$$

其中hB為雲底的溼靜能，在此視為一已知量；hi為由雲底至zi之間的平均捲入溼靜能。當μ為常數時，

$$\bar{h}_i = \frac{1}{Z_i - Z_B} \int_{Z_B}^{Z_i} \bar{h} dZ \quad (15)$$

可直接由環境溼靜能h的垂直分佈求得而與μ的值無關。因此，hi可視為一已知量。(13)及(14)兩式顯示，ni及hi的值可直接由給定的高度值zi決定，而不需要如原始的模式一般，由雲底一層層的往上積分至所要的高度。在(15)式中的積分式對所有雲譜中的雲屬均相同，因此只要計算一次。至於所用的積分方式和本文討論的主題無關，在此保留積分的描述。

如果我們將(13)及(14)式應用於雲頂處，高度為ZT，然後利用兩式解出μ值可得

$$\mu = \frac{h_B - h_T}{(Z_T - Z_B)(h_T - \bar{h}_T)} \quad (16)$$

在雲頂處，hT必須滿足(4)式，因此(16)式又可寫成

$$\mu = \frac{h_B - \bar{h}_T^*}{(Z_T - Z_B)(\bar{h}_T^* - \bar{h}_T)} \quad (17)$$

(17)式等號右邊均為已知值（如果冰相及雲滴懸浮對hT**的修訂作用被忽略的話），如此μ值的決定就不需要經過反覆運算的過程，也不需要經過由雲底往上積分溼靜能守恆方程的步驟，這種運算過程可比原始的積雲樣本模式，即指數模式，快上十倍以上。

從物理上看，線性模式和指數模式的主要差異在於，線性模式中各層空氣捲入的相對權重固定，均正比於各層的厚度。而指數模式中，則有較大權重的捲入空氣源自於高層接近雲頂部份，這個相對權重同時也是相對捲入率， λ ，的函數。為了讓線性模式更具代表性，也為了尊重雲頂捲入過程存在的現實，我們有必要在線性模式中加入額外的雲頂質量捲入量。也就是令在雲頂處

$$\eta_T = 1 + \mu(Z_T - Z_B) + (\Delta\eta)_T \quad (18)$$

其中和直接應用(13)式到雲頂處所不同的，在於多出了一項 $(\Delta\eta)_T$ ，這便是雲頂捲入項。如果 $(\Delta\eta)_T$ 是 μ 的線性函數，則本節所討論，線性模式在計算時效上的優點便可以完全保下來。根據這個考慮，我們簡單的定義

$$\nu \equiv \frac{(\Delta\eta)_T}{\mu(Z_T - Z_B)} \quad (19)$$

我們同時也假設 ν 為一知量。(19)式表示雲頂捲入量正比於總側向捲入量。如果 ν 值趨近於無窮大，則此線性模式便成了只考慮雲頂捲入過程的積雲樣本模式。

相對於(18)式的溼靜能守恆仍可寫成類似於(14)式的型式，如

$$h_T = \frac{1}{\eta_T} [h_B + (\eta_T - 1)\bar{h}_T] \quad (20)$$

其中 η_T 要由(18)式決定，而且

$$\begin{aligned} \bar{h}_T = & \frac{1}{\mu(Z_T - Z_B) + (\Delta\eta)_T} \left[\mu \int_{Z_B}^{Z_T} \bar{h} dZ \right. \\ & \left. + (\Delta\eta)_T \bar{h}_T \right] \quad (21) \end{aligned}$$

也和(15)不同。如果將(19)代入(21)式中，則該式等號右邊的 μ 可以消去， h_T 的值便和 μ 值無關，而只決定於環境溼靜能的垂直分佈了。

加入額外的雲頂捲入量還有另外一個重要的意義，現說明如下。如果我們把雲頂條件(4)代入(20)式，那麼(20)式可改寫為

$$h_B - \bar{h}_T^* = (\eta_T - 1)(\bar{h}_T^* - \bar{h}_T) \quad (22)$$

我們知道通常 η_T 大於 1 (捲入發生的關係)，所以 $h_B - h_T^{**}$ 和 $h_T^{**} - h_T$ 必須同號。就物理上考慮，捲入量愈小，雲應具有較大的浮力，因此我們要求當沒有側向捲入時，理論上雲頂應有正浮力，這表示 h_B 必須大於 h_T^{**} ，也就是說 $h_B - h_T^{**}$ 必須須為正值。那麼(22)式告訴我們， $h_B > h_T^{**} > h_T$ 是該種積雲存在的一個必要條件。

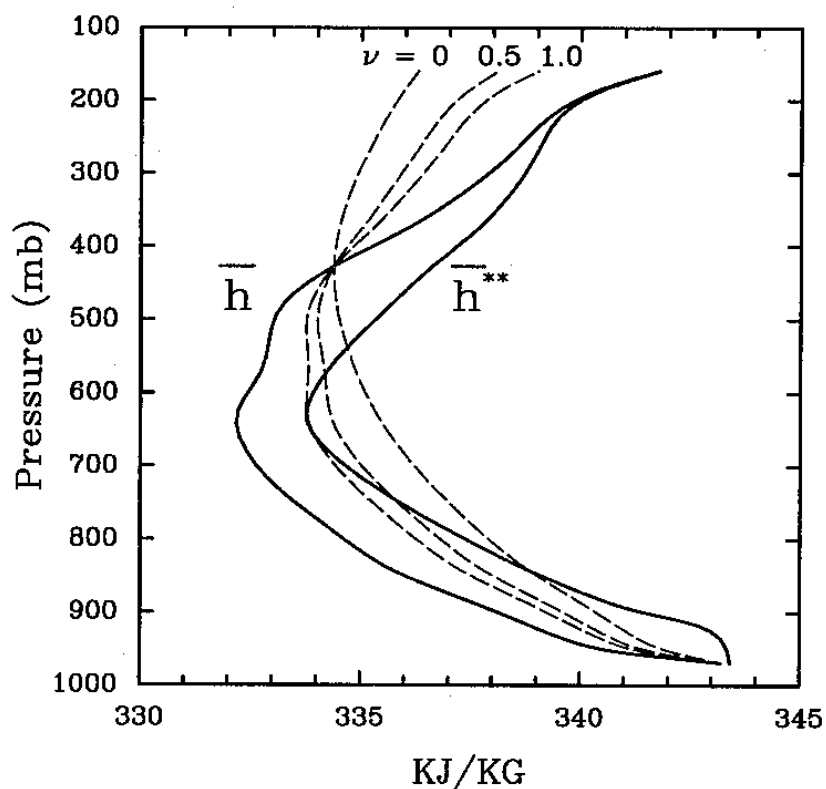
以 GATE 的一個探空分析為例，在圖一中兩條實線各表示 h 及 h^{**} 的垂直分佈，我們並將相當於 $\nu = 0, 0.5$ 及 1 的 h_T 以虛線表示，並標於圖中。由此圖中很明顯的可以看出，當 $\mu = 0$ 時，雲頂介於 830mb 至 540mb 之間的雲將無法滿足(22)式，那些雲種將無法存在。這是個很嚴重的後果，因為捲入率本身是個人為的假設，如果這個假設限制了積雲的存在，則積雲與環境間的平衡過程很可能產生根本性的變化而造成不正確的結果。從另一方面看， $\nu = 1$ 時，幾乎所有的雲都可以滿足(22)式，這表示雲頂的額外捲入率有其必要性。至於什麼樣的質量捲入分佈才是最合理，這需要進一步的研究。

當沒有額外雲頂捲入過程時，理論上使用指數分佈模式也會有類似於線性分佈模式無法滿足(22)式的問題，因為在數值運算上通常相對捲入率， λ ，的值有一定限度的極大值。但是因指數分佈模式中，有較多的空氣由近雲頂處捲入，產生問題的機機會比較小。

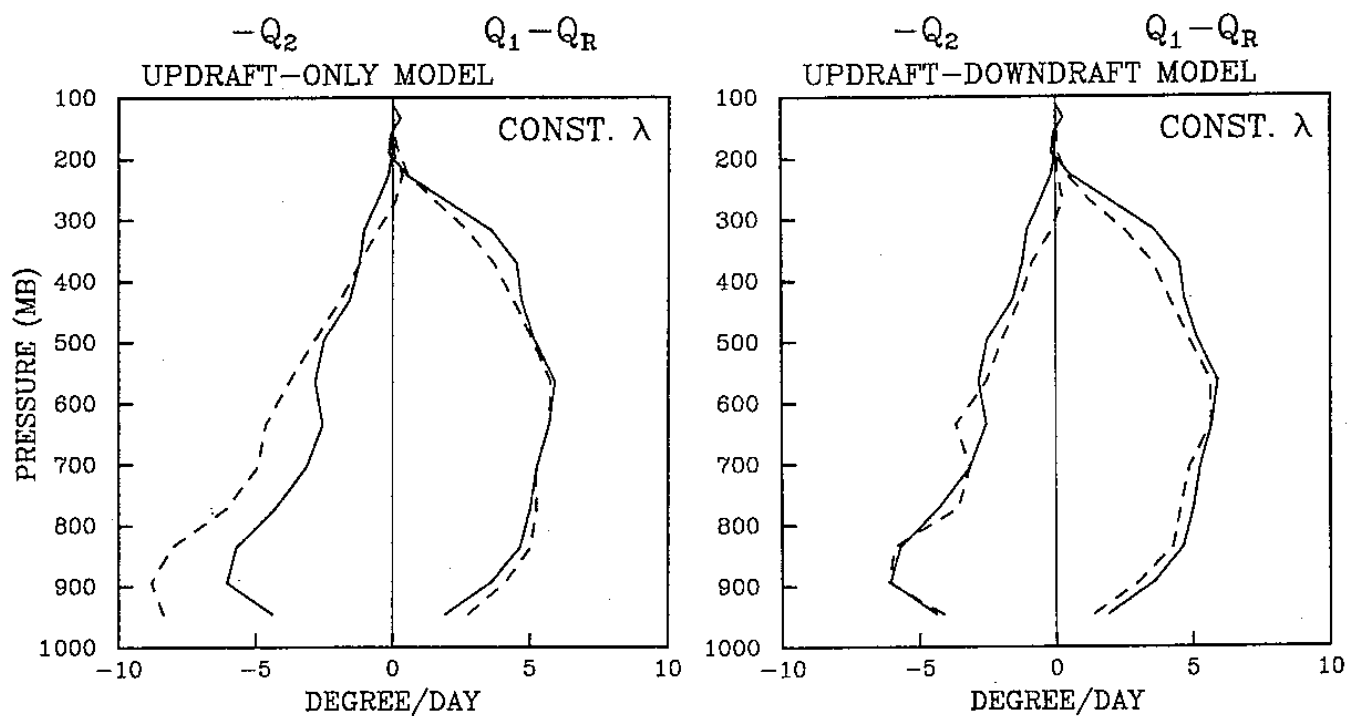
四、半預報測試

半預報測試基本上是利用參數化方案，在給定觀測的大氣狀態下，做一次的預報。由於僅預報一次，預報的結果和數值模式的其它部份便不相關，可以較客觀的分析一個參數化方案的特性。同時，如果我們知道給定觀測狀態當時間的大氣時間變化，我們也可以診斷出觀測時刻積雲的作用，此診斷的結果更可以直接和一次預報的結果比較，以做為參數化方案的

MOIST STATIC ENERGY



圖一 \bar{h} 和 \bar{h}^{**} 的垂直分佈 (實線) 和相對的 hT 隨雲頂氣壓的分佈 (虛線)。



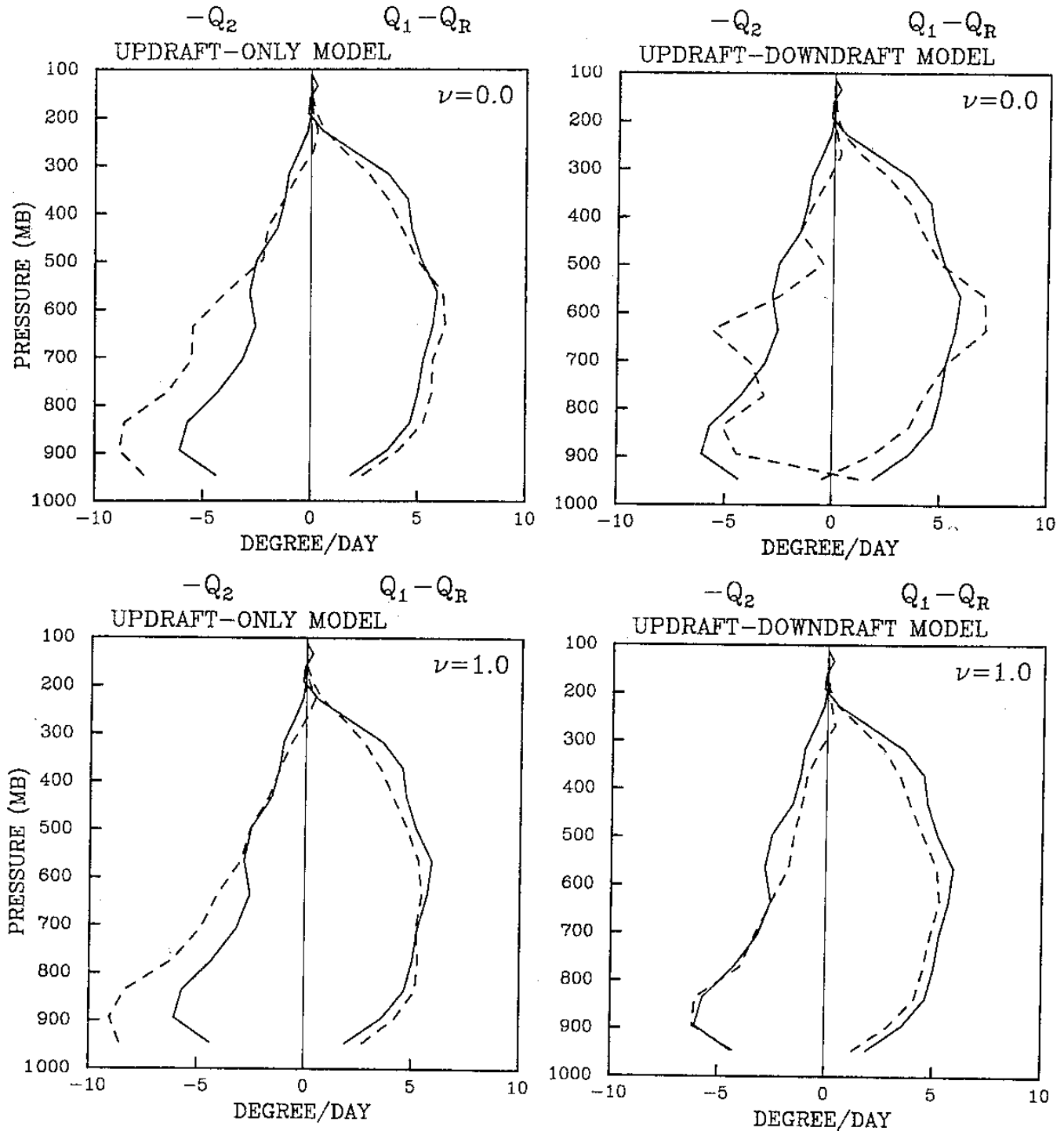
圖二指數模式的半預報結果 (虛線) 和觀測值的比較。

一種校驗。有關半預報測試的細節可參考 Lord(1982) 和 Cheng and Arakawa(1990)。

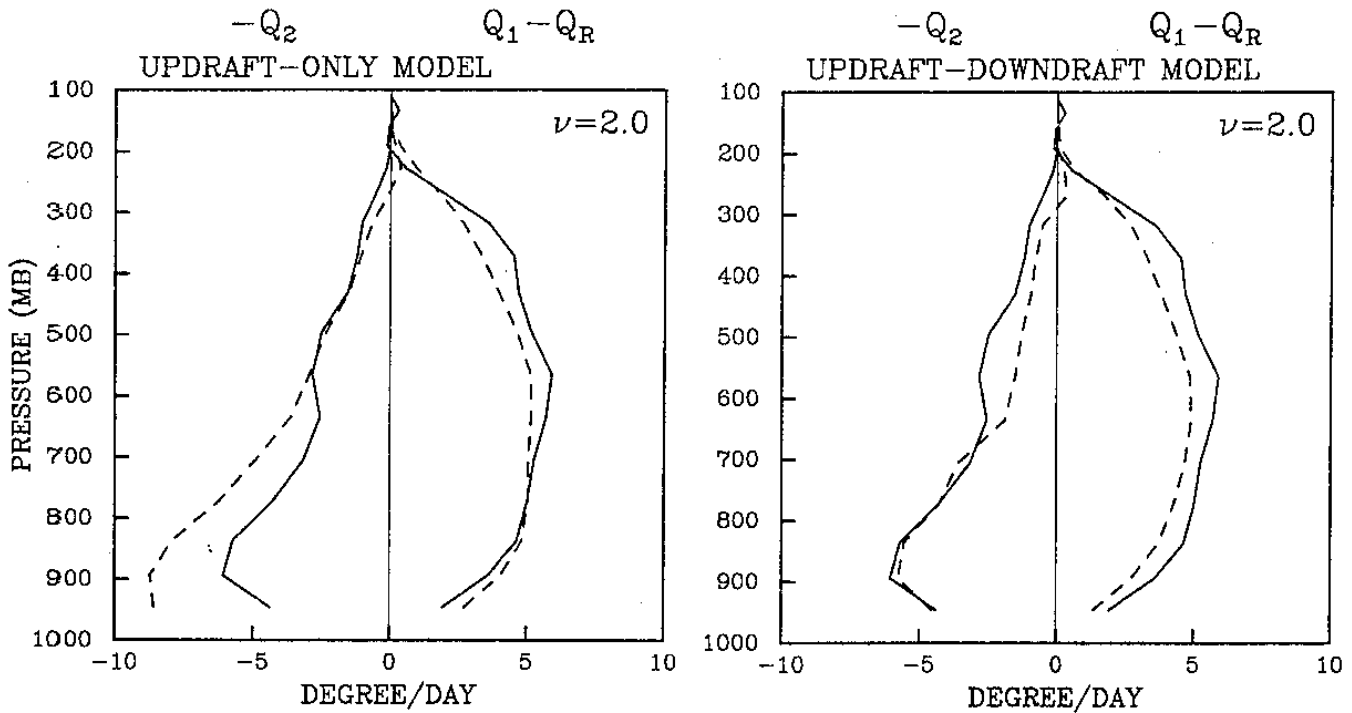
在半預報測試中，我們用的是 GATE Phase III 的資料，有關資料的介紹可參考 Cheng (1989b)。為求測試的完備，我們除了積雲上沖流作用分別以指數模式和線性模式來模擬外，我們還加入了下沖流的作用，而我們使用的下沖流模式滿足質量、溼淨能、水汽、降水的

收支平衡方程式外，還滿足垂直動量收支、降水再蒸發及下沖流和環境間的側向質量交換過程 (Cheng, 1989a; Cheng and Arakawa, 1991a,b)。

圖二為使用指數模式做半預報測試的結果，經 GATE Phase III 共 143 個案例的平均。其中 Q_1 是顯熱源， Q_R 是輻射增溫率，而 $Q_1 - Q_R$ 通常使用來表示積雲對溫度場的作用。在另一方



圖三線性模式的半預報結果（虛線）和觀測值的比較。



圖三 (繼續) 線性模式的半預報結果 (虛線) 和觀測值的比較。

面， $-Q_2$ 為顯水汽源，此量通常用來表示積雲對水汽場的作用。圖中實線表示觀測（診斷）積雲作用的垂直分佈而虛線則表示預報的結果。由圖二中我們可以看出，在只有上沖流作用的情況下，A-S 參數化方案仍能預報出相當合理的積雲對溫度場的作用。但是，同一個模式對水汽場作用的預報卻有很顯著的誤差，這個誤差只有在加入下沖流的作用後才得以改進。

圖三為使用線性模式做半預報測試的結果，其中三個例子分別為 $\nu = 0, 1$ 和 2 。 $\nu = 0$ 表示沒有額外的雲頂捲入量。圖中我們可以看出 $\nu = 1$ 和 2 的例子非常的相似，這表示 ν 的值在一定範圍內並沒有顯著的作用。但 $\nu = 0$ 的結果則有明顯的不同，尤其是有下沖流作用的例子，預報的和觀測的差異更大。造成 $\nu = 0$ 預報不合理的原因便是我們先前利用圖一所討論的問題，因為 $\nu = 0$ 時許多中雲都因為雲頂浮力的設限而無法存在。中雲不存在，少了雲頂捲出頂的增溼作用，我們看到了在 600mb 和 700mb 之間有過度預報減溼的現象；在另一方面，沒有了中雲，低雲便過度的強化，造成近雲底部太弱的積雲增溫及減溼的作用。在進一步的分析中，我們也發現 ν 值不能太大，否則容易造成積雲在雲頂處產生次飽合的現象，這也是不合理的人為設限。

五、結論

本文針對簡化 A-S 積雲參數法中，有關變更積雲樣本模式部份進行分析與測試。原始積雲樣本模式（指數模式）計算費時的主要原因是在求解積雲相對捲入率時需要反覆運算的過程，而且每次的運算都要由雲底往上積分，非常的不經濟。解決這個計算瓶頸的方式，是令雲底之上各層捲入空氣量成一已知的固定比例，如此捲入空氣的平均熱等特性將是一個定值，而和捲入率大小無關，捲入率的決定便不需要經過反覆運算的過程。其中最簡單的方式便是假設積雲捲入率，而非相對捲入率，為常數。在此假設下，質量通量隨高度呈線性遞增，因此稱為線性模式。

線性模式最大的問題，在於無額外雲頂捲入量的情況下，雲頂熱浮力平衡的條件很難滿足，這會造成人為的對中雲存在的設限，容易產生不合理的結果。同樣情況雖然也可能在指數模式中發生，但因指數模式有較多的捲入空氣來自高層接近雲頂部份，所以造成人為設限的情況較少，問題不嚴重。一個能保持線性模式的優點、特性又不致和指數模式有太大的差異，便是在線性模式中加入適量的額外雲頂捲入量。我們定義 $\nu =$ 雲頂捲入 / 側向捲入，我們發現 $\nu =$ 是個很合理的選擇。

在經過半頂報測試後，我們發現當 $\nu = 1$ 時，線性模式和指數模式的結果相當類似、我們也可判定有下沖流的情況下，指數模式在 650 mb 附近過強的減溼預報，很可能是因為部份雲無法滿足雲頂浮力條件，而被人為的限制以致無法存在。當 $\nu = 0$ 時，線性模式因有過多的雲被雲頂條件排除，預報結果和觀測值頗有出入，尤其是有下沖流作用的例子。 $\nu = 2$ 時，結果和 $\nu = 1$ 的情況類似，顯示在合理的範圍， ν 值的決定並不很重要。

致謝

本研究是在國科會計劃 NSC 82-0202-M052-004 支援下完成。

參考文獻

- Arakawa, A. and W. H. Schubert, 1974: Interaction of a cumulus cloud ensemble with the large-scale environment, Part I. *J. Atmos. Sci.*, 31, 674-701.
- Cheng, M.-D., 1989a: Effects of downdrafts and mesoscale convective organization on the heat and moisture budgets of tropical cloud clusters. Part I: A diagnostic cumulus ensemble model. *J. Atmos. Sci.*, 46, 1517-1538.
- _____, 1989b: Effects of downdrafts and mesoscale convective organization on the heat and moisture budgets of tropical cloud clusters. Part II: Effects of convective-scale downdrafts. *J. Atmos. Sci.*, 46, 1540-1564.
- _____, and A. Arakawa, 1990: Inclusion of convective downdrafts in the Arakawa-Schubert Cumulus parameterization. Technical Report, Department of Atmospheric Sciences, UCLA, Los Angeles, CA 90024, 69pp.
- _____, and _____, 1991a: Inclusion of convective downdrafts in the Arakawa-Schubert cumulus parameterization. Extended Abstract Volume, 19th Cong. on Hurricane and Tropical Meteorology, 6-10 May 1991, Fla. Amer. Meteor. Soc., 295-300.
- _____, and _____, 1991b: Inclusion of rainwater budgets and convective downdrafts in a cumulus parameterization., Ninth Conference on Numerical Weather Prediction, 14-18 October 1991, Denver, CO, Amer. Meteor. Soc., 4pp.

Lord, S. J., 1978: Development and observational verification of a cumulus cloud parameterization, Ph.D. thesis, Department of Atmospheric Sciences, UCLA, 359 pp.

_____, 1982: Interaction of a cumulus cloud ensemble with the large-scale environment. Part III: Semi-prognostic test of the Arakawa-Schubert cumulus parameterization. *J. Atmos. Sci.*, 39, 88-103.

Moorthi, S., and M.J. Suarez, 1992: Relaxed Arakawa-Schubert: A parameterization of moist convection for general circulation models. *Mon. Wea. Rev.*, 120, 978-1002.