

全球波譜淺水方程模式之地轉調整

陳建河 郭鴻基

中央氣象局資訊中心 國立台灣大學大氣科學系

摘要

將球坐標上運動方程以渦度 (vorticity) 及輻散度 (divergence) 的形式表示, 加上連續方程式構成一組球坐標上的非線性淺水方程系統。將各預報變數以 spherical harmonic function 做波譜展開, 使用三角形截斷法 (triangular truncation), 在東西方向的處理以快速傅立葉 (FFT) 處理, 南北方向以 Gaussian quadrature 法處理, 非線項則以 transform 法處理, 時間積分採 Runge-kutta 法, 製成一非線性淺水方程波譜模式。

使用 T21 的解析度, 時間積分爲 2 小時, 分別在中緯度及赤道放置一個只有高度場的擾動 (初始風場爲零), 根據擾動的相當高度 (equivalence depth, H) 100 m 所定義的 Rossby 變形半徑 (Rossby radius of deformation) $R_L = \frac{\sqrt{gH}}{f}$, 在擾動的空間尺度大於 Rossby 變形半徑的情況下, 觀察二者地轉調整的過程。

一、簡介

一般數值模式常用的數值方法有二種, 一種是網格點的定差法 (finite difference scheme), 另一種是波譜截斷法 (spectrum truncation)。根據 Simmon 與 Hoskins (1975) 的比較, 波譜模式對於成長中的波動有較佳的振幅及相位解析, 但是波譜模式對於成熟的鋒面結構有較差的描述。一般而言, 採用波譜模式有下列幾個優點: (1) 波譜模式在處理水平平流的非線項時可以避免掉 aliasing error, 另外對大尺度的波動也沒有位相的誤差存在。(2) 波譜模式沒有極點 (pole) 處理問題存在。(3) 波譜模式可以很方便地使用 Semi-implicit 時間積分法, 可以使用較長的時間積分間距。(4) 波譜模式所使用的電腦計算時間比差分模式少。早期的波譜模式

之所以沒有很普遍的主要原因是非線性項的處理是使用 interaction coefficient 法, 此種方法在計算上相當複雜且耗時。Orszag (1970), Eliassen et al (1970) 提出 transform method, 而使得非線項的處理變的簡單且迅速, 因此使波譜模式被廣泛的採用。

中央氣象局 (CWB) 在完成第一期計劃之後已擁有全球預報模式 (GFS)、區域預報模式 (RFS)、中尺度預報模式 (MFS)、及颱風預報模式 (TFS) 等 4 個預報模式, 再加上目前使用的颱風正壓模式, 其動力部份均屬於網格點差分法。而 CWB 目前正積極進行中的第二期計劃, 有關全球預報模式的動力部份便是採用

波譜法，而初始化 (initialization) 方法也由原來的非線性平衡方程 (non-linear balance equation) 以變分法 (variational method) 處理改為較進步的非線性正模初始化 (Non-linear Normal Mode Initialization, 簡稱 NNMI) 法。基於對 NNMI 的需要及對未來波譜模的了解，乃著手於建立一非線性淺水方程波譜模式。

非地轉的擾動發展被認為是一種地轉調整的過程，這是 Rossby 在 1938 首先提出的。一個決定風場與質量場作地轉調整的主要因子是 Rossby 變形半徑 (Rossby radius of deformation)。一般而言空間尺度大於變形半徑時，風場調整以適應質量場，當空間尺度小於變形半徑時，質量場調整以適應風場。大多數的學者都是在一度空間，無限延伸的 f-plane 上研究地轉調整的問題 (例如 Rossby, 1938)，或者局限在一個南北有邊界而東西向無限延伸的空間上研究 (例如 Gill, 1976)。很顯然地，這與實際的大氣有若干的差距，Matsuda and Takayama (1989) 使用球坐標上線性淺水方程來研究此地轉平衡的問題以期能更接近實際的情況。研究的結果發現，當變形半徑小於擾動的空間尺度時，對中緯度的擾動而言，在地轉調整的過程中所產生的慣性重力波 (inertia-gravity wave) 向赤道傳播，之後便在赤道地區消散，對赤道地區的擾動而言，擾動的發展則呈現向東移動的 Kelvin wave 及向西移的 Rossby wave，即一般熟知的赤道波動。另外當變形半徑大於擾動的空間尺度時，對中緯度的擾動而言，所產生的重力波在南北對稱的兩波動之間振盪並不消散，對赤道的擾動發展則與中緯度的情形相似。

本文利用非線性淺水方程波譜模式來研究中緯度及赤道地區擾動的地轉調整過程。本文共分四節

，第一節為簡介，第二節為模式的方程式，第三節為測試結果，第四節為結論。

二、模式的方程式

在球坐標上的水平運動方程式及連續方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{u}{a \cos \phi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} - \frac{v}{a} \frac{\partial u}{\partial \phi} + f v - \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{u}{a \cos \phi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} - \frac{v}{a} \frac{\partial v}{\partial \phi} - f u - \frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{u}{a \cos \phi} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} - \frac{v}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} - \Phi \cdot D \quad (3)$$

u : 東西向風的分量

v : 南北向風的分量

Φ : 重力位高度

ϕ : 緯度

λ : 經度

D : 水平輻散場 $D = \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \phi}$

f : 科氏參數

a : 地球半徑

ξ : 渦度之垂直分量, $\xi = \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} - \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial \phi}$

將水平運動方程以輻散度 (Divergence) 與渦度 (vorticity) 變數表示，則方程式(1), (2)可寫成

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{-1}{\cos^2 \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} [U(\xi+f)] - \frac{\partial}{\partial \mu} [V(\xi+f)] \quad (4)$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1}{\cos^2 \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} [V(\xi+f)] - \frac{\partial}{\partial \mu} [U(\xi+f)] - \nabla^2 \left(\Phi + \frac{a^2}{\cos^2 \phi} \frac{U^2 + V^2}{2} \right) \quad (5)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{-U}{\cos^2 \phi} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} - V \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} - \Phi D \quad (6)$$

其中

$$U = \frac{u \cos \phi}{a}$$

$$V = \frac{v \cos \phi}{a}$$

$$\mu = \sin \phi$$

對任意的變數 X 可以用 spherical harmonic ($Y_n^m(\mu)$) 展開

$$X(\lambda, \mu, t) = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^M X_n^m(t) Y_n^m(\lambda, \mu) \quad (7)$$

$$Y_n^m(\mu, \lambda) = P_n^m(\mu) \cdot e^{im\lambda} \quad (8)$$

其中

$P_n^m(\mu)$: associate legendre polynomial

M : 三角形截斷波數

m : 經向波數

n : 總波數

利用 spherical harmonic 的正交性，波譜系數 $X_n^m(t)$ 可以下式得到

$$X_n^m(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} X(\lambda, \mu, t) P_n^m(\mu) e^{-im\lambda} d\lambda d\mu \quad (9)$$

對經向的積分可以用快速傅立葉 (Fast Fourier Transform, 簡稱 FFT) 處理，緯向積分可以用 Gaussian quadrature 法處理。至於非線項的處理則採用 transform method 也就是將各變數從波譜空間轉換回實際物理空間網格點上相乘之後再轉換回波譜空間，此法不但簡單而且計算上也比傳統的 interaction coefficient method 快很多 (Orszag, 1970)。至於時間積分則採用 Runge-kutta 時間積分法，積分的時間間距為 2 小時。

三、測試結果

模式使用 T 21 (三角形截斷波數 $M = 21$) 來做為測試，初始場是在中緯度及赤道地區分別放置一質量場 (Φ) 的擾動，根據擾動的相當深度 (H) (equivalence depth) 定義 Rossby 變形半徑 ($L_R = \frac{\sqrt{gH}}{f}$, g 是重力加速度, f 為科氏參數)，以擾動的空間尺度大於 L_R 為測試的對象，以此模式預報 96 小時，觀察其地轉調整的過程。

圖一 1(a)-(i) 為中緯度的情形，初始場為一南北對稱的高度場擾動，中心位於 $0^\circ E$ ，南北緯度各 40 度的地方，風場的擾動為零 (圖一 1(a))。12 小時的預報顯示，兩個擾動之間的熱帶地區有明顯的較小尺度的高低壓中心 (重力波)，這顯示擾動向赤道區傳播，經地轉調整所產生的風場顯示並未達到地轉平衡 (圖一 1(b))。圖一 1(c)-(d)，為 24 小時及 36 小時之預報，顯示那些傳向赤道區的重力波往東西方向傳播，而南北對稱的擾動中心則略往西移 9 個經度，相對應的風場尚未達到地轉平衡。48 小時預報 (圖一(e)) 顯示擾動中心並不移動，但是由於往西移動的各 Rossby wave 的相位速度 (phase speed) 不同，於是形成擾動的東邊 (北半球) 有較大的梯度，所相對應的風速也較強，此時擾動似乎已達地轉平衡。接下來的 60 小時至 96 小時預報 (圖一(g)-(i)) 顯示擾動的中心又往西移，同時也因為科氏參數 (f) 隨緯度的變化而使得擾動有向西南方向的傾斜 (北半球)。

赤道地區的情形則如圖一 2(a)-(i) 所顯示，圖一 2(a) 為初始場，12 小時的預報顯示擾動似乎一分為二，到了 24 小時預報 (圖一 2(c)) 在赤道區形成二個主要的波動，一為往東移動的 Kelvin wave，一為往西移動的 gravity wave, Rossby wave，

mix-Rossby wave 的合成，到了48小時預報（圖-2）顯示kelvin wave 獨立出來往東移動，中心距起始點約55個經度，另一個往西移的綜合波高值中心約距起始點18個經度。根據equatorial Beta plane 的理論，往東移動的 kelvin wave 之移速約為往西移移動的 Rossby wave 速度的3倍，另外波動的南北向空間尺度約±4倍的equatorial Rossby radius。根據我們所計算出的 Rossby變形半徑配合圖上波動的南北空間尺度局限在25度左右是相一致性的。隨著預報時間的增加，Kelvin wave 穩定地往東移，而往西移的綜合波動則呈現多樣的變化（圖-(f)-(i)）。

四、結 論

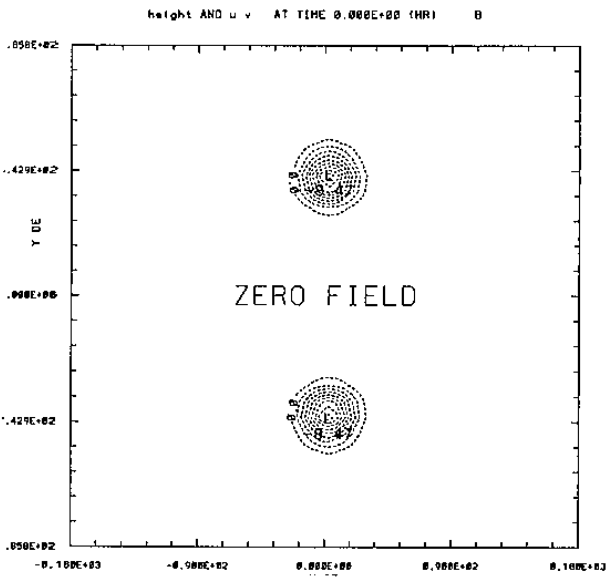
將球坐標上的水平運動方程以輻散度及渦度的形式表示，加上連續方程形成一組非線性淺水方程組。將各變數以spherical harmonic function 做波譜展開，東西向積分以快速傅立葉（FFT）處理，南北向的積分則以 Gaussian quadrature 法處理，非線性項的處理則使用 transform 法，製做成一波譜模式，時間積分則採用 Runge-kutta 法。使用三角形截斷（triangular truncation） T_{21} ，時間積分間距為2小時，分別在中緯度及赤道各放置一擾動積分96小時，觀察其地轉調整的過程。

中緯度擾動的地轉調過程為擾動在調整過程中所產生的重力波先向赤道傳播，接著在赤道區就往東西方向傳播，而中緯度的擾動中心則略往西移動10個經度，同時由於各 Rossby wave 西移的速度不同造成擾動東邊有較的風速，同時受到科氏參數離緯度的變化擾動有往西南（北半球）東北（南半球）的傾斜。對赤道的擾動而言，在地轉調的過程中有二種主要的波動產生，一為往東移的kelvin wave

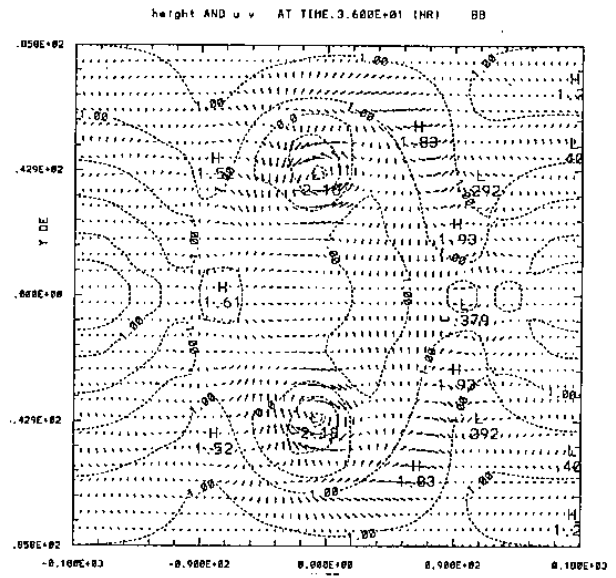
，一為往西移的 gravity wave, Rossby wave，mix-Rossby wave 的綜合，根據赤道波動的理論，Kelvin wave 往東移的速度約為往西移的 Rossby wave速度的3倍左右，同時所有波動的南北空間尺度約±4倍的Rossby radius，與本文的測試相似。

五、參考文獻

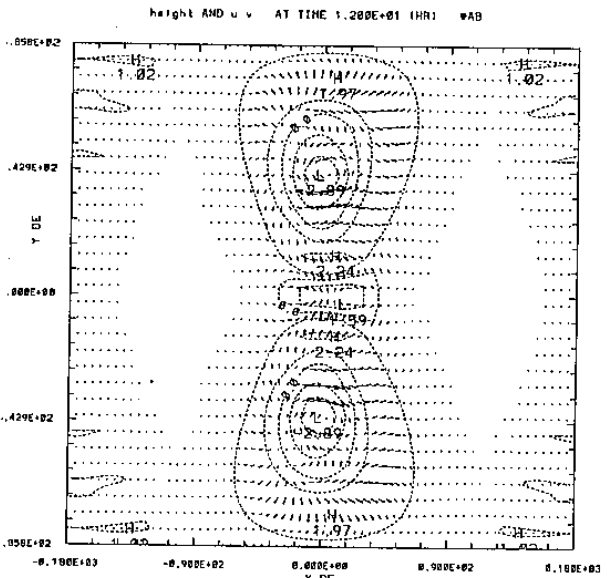
1. Bourk, W. 1972: An efficient, one-level, primitive equation spectrum model. M.W.R vol 100, 683-689.
2. Hogan, T.F., Rosmond, T.E. 1990: The NOGAPS forecast model, A technical description.
3. Matsuda Y. and Takayama, H. 1989: Evolution of disturbance and geostrophic adjustment on the sphere. J.M.S. vol 67, 949-966.
4. Orzag S.A. 1970: Transform method for the calculation of vector coupled sum: Application to spectrum form of the vorticity. equation. J.A.S. vol 27, 890-895.
5. Rossby C.G. 1938: On the mutual adjustment of pressure and velocity distribution in certain simple current system, II, J. Mar, R Res, 1, 239-263.
6. Simmon A.J. and Hoskin B.J. 1975: A comparison of spectral and finite-difference simulations of a growing baroclinic wave. Q.J.R, vol 101, 551-565.
7. Gill, A.E. 1976: Adjustment under gravity in rotating channel. J. Fluid Mech., 77, 603-621.



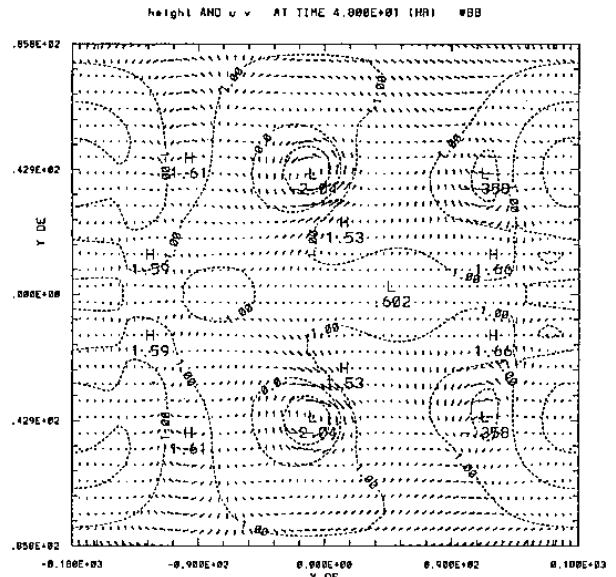
圖一 I : 中緯度擾動的地轉調整過程 (a) : 初始場



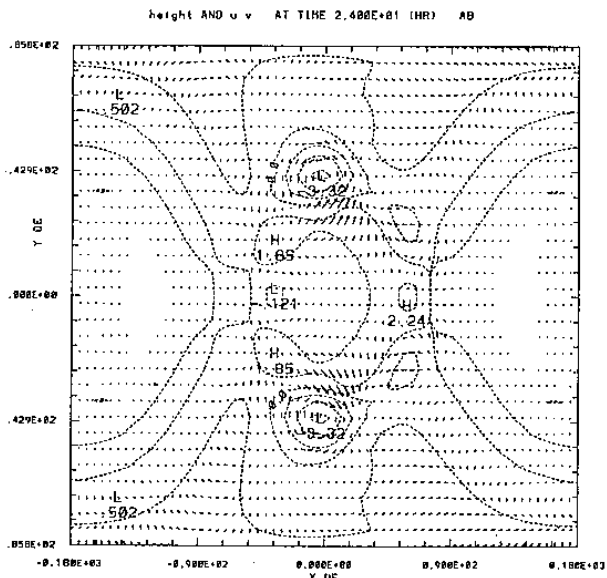
(d) : 36小時預報



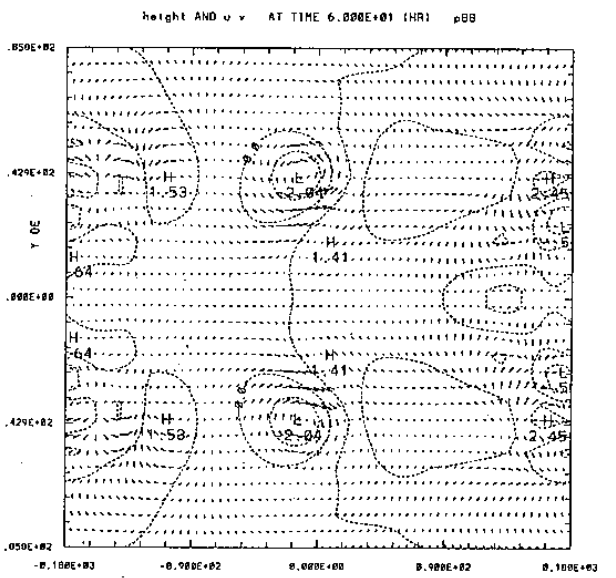
(b) : 12小時預報



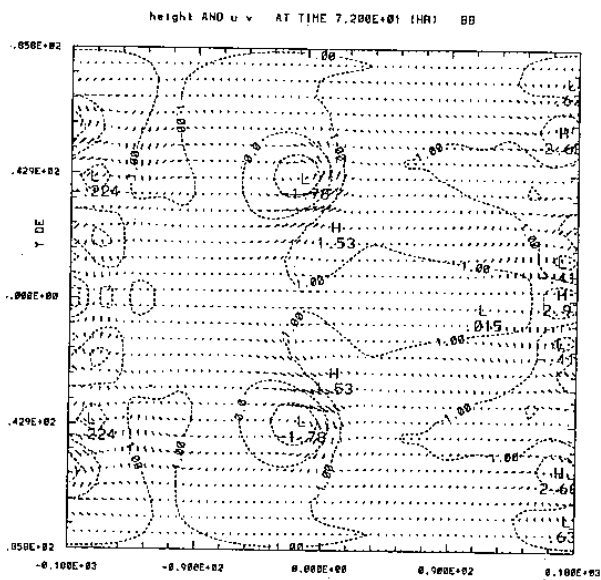
(e) : 48小時預報



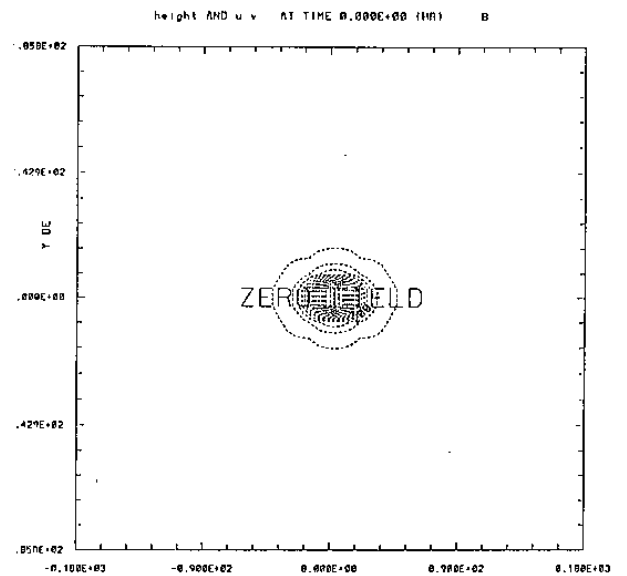
(c) : 24小時預報



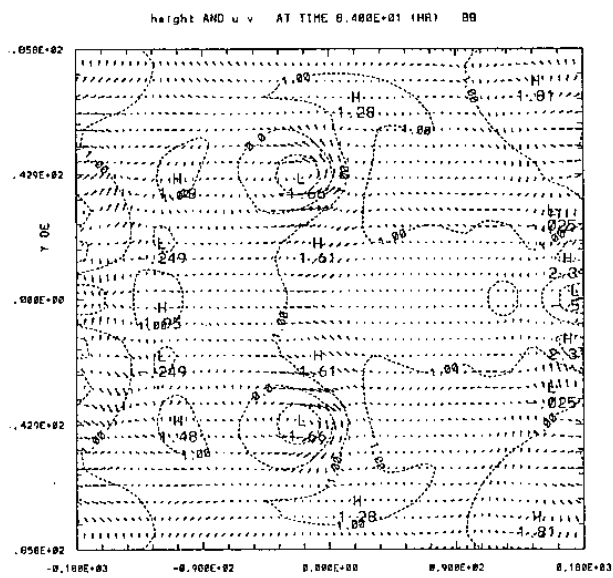
(f) : 60小時預報



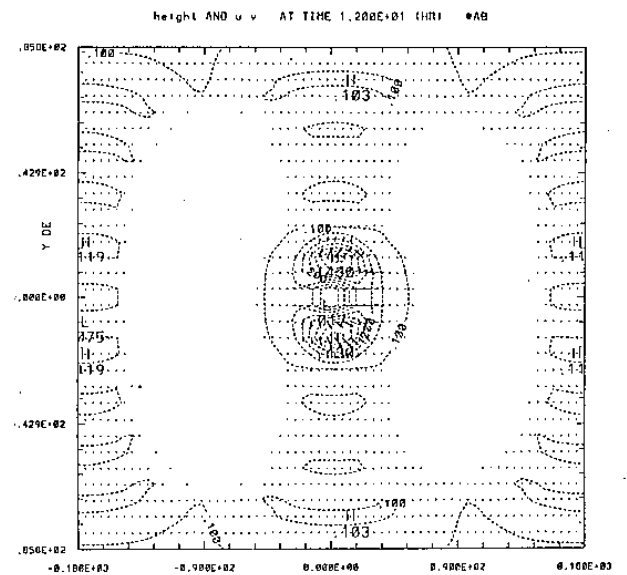
(g) : 72小時預報



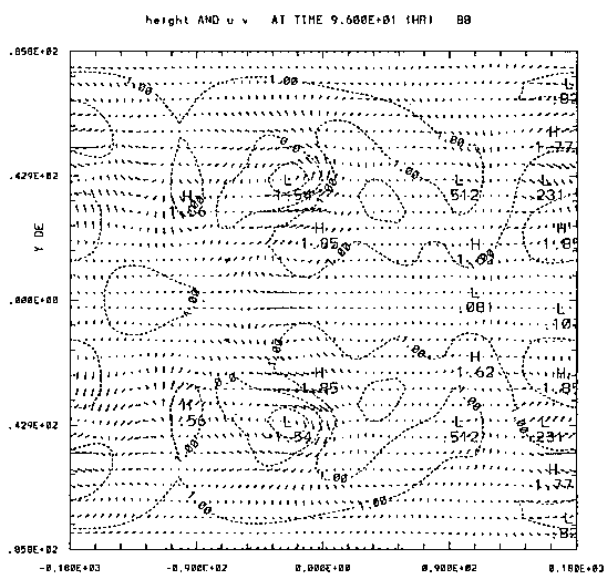
圖一 2 : 赤道擾動的地轉調整過程 (a) : 初始場



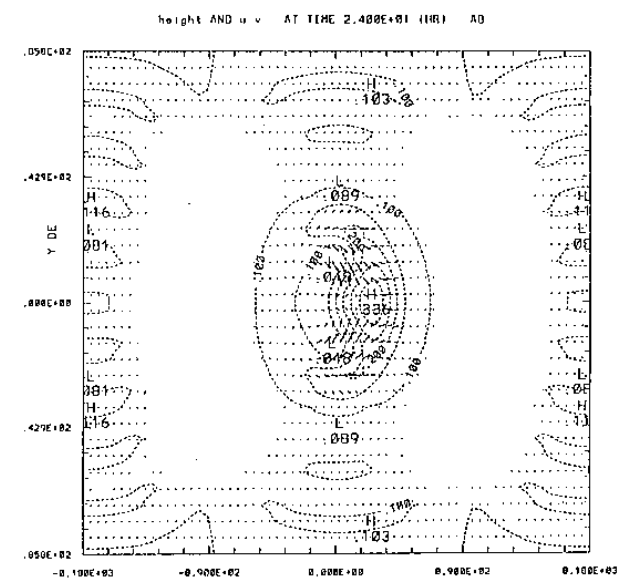
(h) : 84小時預報



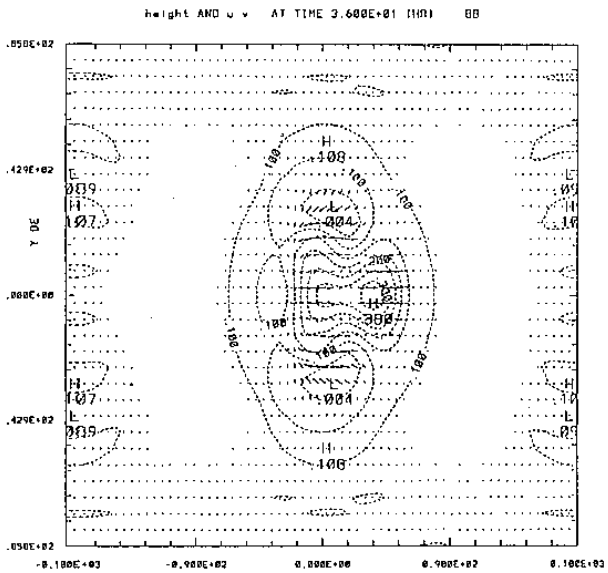
(b) : 12小時預報



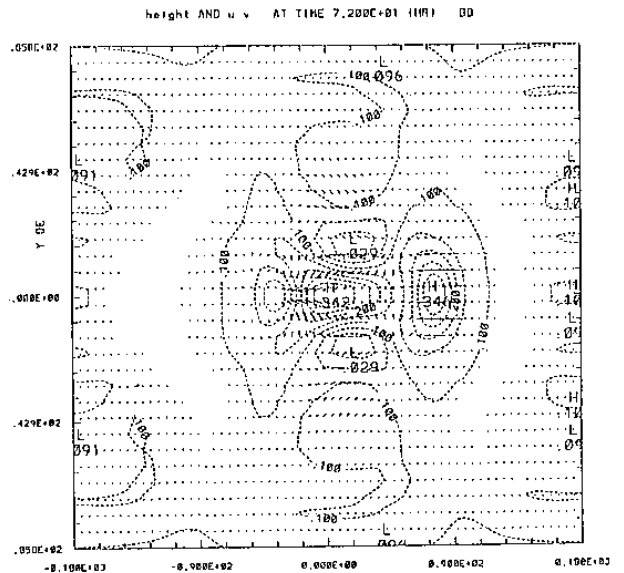
(i) : 96小時預報



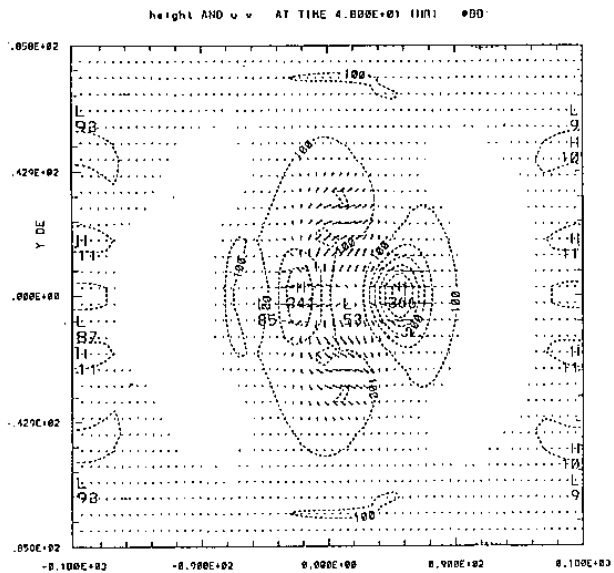
(c) : 24小時預報



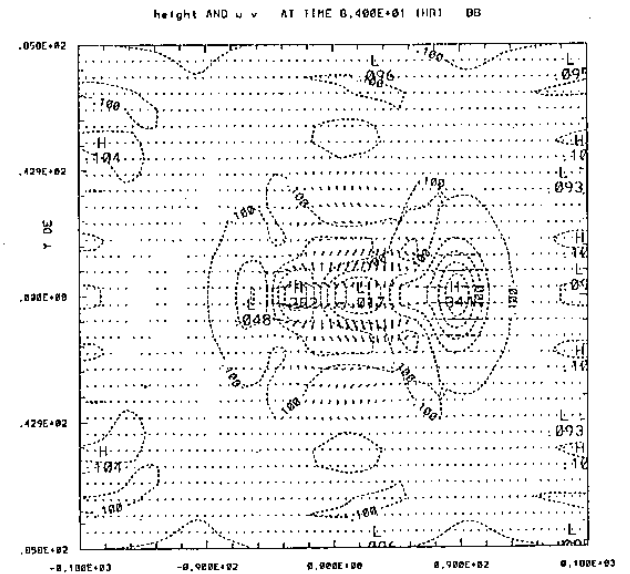
(d) : 36小時預報



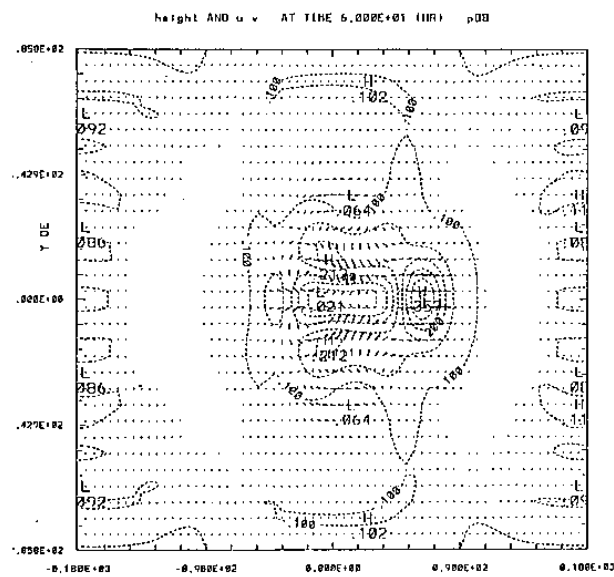
(g) : 72小時預報



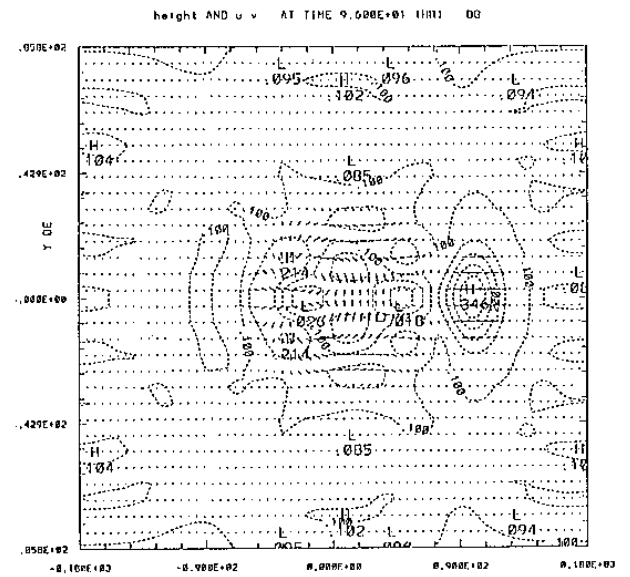
(e) : 48小時預報



(h) : 84小時預報



(f) : 60小時預報



(i) : 96小時預報

