

地形座標上氣壓梯度力誤差之研究

彭順台 林淑卿 R. T. Williams

美國海軍研究院 中央氣象局 美國海軍研究院

摘要

爲了研究隨地形變化之 σ 座標上的氣壓梯度力之誤差，我們選用了二種方法運用在區域預測系統測試之，並與作業結果做比較。第一種方法是 Janjic and Mesinger 所提出之靜力一致方法，另一種則是 Zheng and Liou 所提的方法，他們的方法是將氣壓梯度力分爲二部份，一爲初始值部份，另一爲與初始值之偏差部份。只有偏差部份在地形座標中計算。我們亦同時進行理想個案及實際資料之個案測試。初步結果顯示此兩種方法與舊方法之差異不大。

一、前言

目前區域預測系統(RFS)垂直方向採用隨地形變化之 σ 座標，在此種座標系的動量方程式之水平氣壓梯度力須用兩項表示，一項爲 σ 面上的重力位梯度，另一爲由地形高度差所造成之修正項，此修正項用地形氣壓梯度計算之。不幸地，在陡峭的山脈地區這兩項通常是符號相反大小相當，所以此種表示法會產生大的截斷誤差。許多學者專家從事於消除此誤差之研究，到目前爲止，尚未能發展出能完全消除此誤差之方法。所有被提出的方法都是在理想條件下而能求得完全無誤差，希望進而運用在實際大氣時，其誤差會較小。Janjic(1977)介紹誤差來源的最簡潔概念，Mesinger(1982)又更完整地探討此類問題。基本上，若用靜力一致方法則能局部地將誤差減至最小。Mesinger and Janjic(1985)廣泛地探討此類問題之研究，在此我們只討論跟本研究相關的方法。

早期 Smagorinsk et al. (1967) 所提出之方法是在每一時距(time step)均將重力位直接內

插回到等壓面上，然後在等壓面上計算氣壓梯度力，此方法耗太多計算時間，而且在頂層及底層必須用外插方法求得。Gray(1973)所提出方法曾經被廣泛採用，乃是 Gray 的方法是先將重力位減去某一參考層後的差值，再求差值的氣壓梯度力；這方法能減小 σ 一座標上兩項氣壓梯度項的值，但是選擇適當的參考場是非常困難。最近 Zheng and Liou (1986)所提出的方法綜合了 Gray(1973)及 Smagorinsky(1967)兩方法。此種方法是將重力位分解爲二部份：一爲初始值，另一爲與初始場之偏差值。初始氣壓梯度在初始等壓面上計算一次，而後在每一時距只計算偏差值在 σ 座標上的兩項氣壓梯度。如此做法，可減小 σ 座標上的兩項梯度值，因此在峻峭地區希望偏差值所求得之氣壓梯度之誤差較小。

本研究，分別就 Zheng and Liou(1986)所提出之方法及 Janjic and Mesinger(1985)所提出之靜力一致方法，進行討論並且測試之。第二章將描述這些方法，第三章則比較理想個案及應用實際資料的結果並討論之，結論述於第四章。

二、方法之描述

(a) 靜力一致方法 (Hydrostatic consistent scheme)

如前所述靜力一致法乃是 Janjic (1977) 及 Mesinger (1982) 所提出。在 σ 座標上，氣壓梯度力的一般式可寫成如下：

$$-\nabla_p \phi = -\nabla_\sigma \phi - RT \nabla p_s \quad (1)$$

在此 p_s 是地氣壓 (terrain pressure)，上式又可改寫為：

$$-\nabla_p \phi = -\nabla_\sigma \phi - \nabla(\phi_p - \phi_\sigma) \quad (2)$$

(1)式右手邊的第二項可視成爲與(2)式右手邊的第二項相等。物理上，此項可解釋爲從等 σ 面外插到等 p 面的重力位高度差 (ϕ)，這可用圖 1 做概要式說明。在計算(1)及(2)式的右手邊第 1 項時，我們會用到靜力方程式之積分。如圖 1 所示，垂直方向 ϕ 及 T 配置是屬於非交錯網格，在計算(2)式右手邊第一項及第二項時所包含之網格點不相同，截斷誤差因此產生，這方法是靜力不一致。最簡單的修正方式就是將變數垂直方向交錯放置如圖 2 所示。如此一來，在 σ 面上計算 ϕ (第一項) 與計算中從 σ 面到 p 面之差 (第二項) 所包含的網格就相同了，Arakawa and Suarez (1983) 的方法亦採用此種網格排列。在目前的作業系統中，有限區域預測系統 (Limited Area Forecast System; LAFS) 是屬於非交錯網格式，所以靜力不一致。

(b) Zheng and Liou's scheme

在 Zheng and Liou 的方法中，氣壓梯度力 x 一方向分量的表示如下式：

$$P_x = -p_s \left[\frac{\partial \phi_0}{\partial x} \right]_p - \left[\frac{\partial}{\partial x} (p_s \phi') \right]_\sigma - \left[(RT' - \phi) \frac{\partial p_s}{\partial x} \right]_\sigma$$

$$p_s \left[\frac{\partial \phi_s}{\partial x} \right] \quad (3)$$

在此 ϕ_0 是等壓面上之初始重力位， T' 爲 σ 面上現在溫度與初始溫度之差， ϕ' 爲 σ 面上現在重力位與初始重力位之差。

我們想要強調的是，在執行此方法時發現在(3)式表示法中有一錯誤。在(3)式中第一項下標 p 表示在等壓面上之初始重力位梯度。因爲保持 σ 面不變，則在往後的時距裡的等壓面與初始等壓面必定不相同，因此必需有另外一項以補償這不同時距不同等壓面的差異，此項可寫爲下式中之右手邊第二項：

$$P_x = -p_s \left[\frac{\partial \phi_0}{\partial x} \right]_{p_0} - RT_0 \left[\frac{p_s}{p_{s0}} \frac{\partial p_{s0}}{\partial x} - \frac{\partial p_s}{\partial x} \right] - \left[\frac{\partial}{\partial x} (p_s \phi') \right]_\sigma - \left[(RT' - \phi') \frac{\partial p_s}{\partial x} \right] - p_s \left[\frac{\partial \phi_s}{\partial x} \right] \quad (4)$$

方程式(3)是不對的公式，必須加入此修正項 (如方程式(4))才正確。但是，加入此項會增加截斷誤差 (truncation error)，原始作者並未討論此問題。

Zheng and Liou 亦設計了一個有效的反覆內插法以消除在 σ 面與等壓面間內插所造成之誤差。若內插方法用 "A" 方法表示，則反覆內插法如下：

①將等壓面上的 ϕ 內插到 σ 面後再內插回等壓面上

$$\phi_p(0) \rightarrow \phi_\sigma(1) \rightarrow \phi_p(1) \quad (5)$$

②計算內插所產生之誤差

$$\nabla \phi_p(1) = \phi_p(0) - \phi_p(1) \quad (6)$$

③用內插方法 "A" 將誤差從等壓面內插到 σ 面

，再內插回等壓面上

$$\nabla\phi_p^{(1)} \rightarrow \nabla\phi_\sigma^{(1)} \rightarrow \nabla\phi_p^{(2)} \quad (7)$$

④這誤差修正項再加回 σ 面上之重力位

$$\phi_\sigma^{(2)} = \phi_\sigma^{(1)} + \nabla\phi_\sigma^{(1)} \quad (8)$$

⑤反覆執行以上步驟，直到(7)式中中間項趨近於一期望小值

$$\phi_\sigma = \phi_\sigma^{(1)} + \sum_{n=0}^{N-1} \nabla\phi_\sigma^{(n+1)} \quad (9)$$

三、用二種方法計算氣壓梯度力之結果

(a)理想情況下之測試結果

若利用不同方法計算氣壓梯度力，則必須校驗其誤差大小，所以必須製造一已知氣壓梯度力的環境場。在以前的研究中（例 Arakawa and Suarez (1983)），他們選一種氣壓梯度力正好是零的溫度場來討論他們的方法，在這些研究中，溫度場通常都只是氣壓場的解析函數（即 $T = a \ln(p)$ ）。在 σ 面上的重力位高度 ϕ 是從平均海平面上積分而來，對不同的兩點，其距離為 δx ，如果一點正好位於傾斜的地形上，另一點則位於相等於等壓面而地形高度為零的點，則此兩點的重力位高度是用相同的解析公式而得到相同之值。然而運用於模式中時，我們採用特定的溫度，而地表重力位則用地形高度與重力加速度之積為代表。如此做法，若兩點位於相同氣壓面但有不同的地形高度時，則此兩點的重力位不會相等。因此無法決定不同方法之精確度好壞。為克服此困難，我們強迫具有相等氣壓的兩點其重力位高度亦相同，作法是比較兩點的地面氣壓，將較低值直接設定到另外一點，然後從此等壓面積分到 σ 面的重力位代表第二點之重力位高度

（如圖3所示），所以若初始設定每一等壓面具有一定溫度時，則氣壓梯度力趨於零。

我們利用最高地形分別為1000公尺及2000公尺的理想地形來測試氣壓梯度力的精確度，地形剖面如圖4所示。在每一等壓面都具有一定常溫度，計算高度為1000公尺及2000公尺的地形之第一時距時之氣壓梯度力。我們只比較最高點開始的五點氣壓梯度力值。除這五點以外的地形幾近於零。靜力一致方法必須將垂直方向變數重新放置，即所謂的 ϕ 與 T 垂直交錯排放，結果與非交錯網格比較，在某些層有些點較好，有些點則較差。因此，平均而言交錯網格對非交錯網格並沒有改進多少。

(b)使用實際資料之測試結果

因為 Zheng and Liou 方法的基本概念是用與初始場之偏差值來計算氣壓梯度力，所以用以上之測試不能顯示出此新方法之差異。所以在此利用區域預測系統之實際地形及實際資料來測試此方法。比較作業版，Zheng and Liou 的方法及靜力一致的方法所得之海平面氣壓場在不同時間之預報圖，可看出作業版與 Zheng and Liou 的方法差異甚小。用靜力一致的方法所得較其他二種方法的海平面氣壓約低1~2 mb，同時亦顯示稍多較小尺度之擾動。

四、結論

我們介紹並執行兩種不同計算氣壓梯度力的方法，希望能在地形較峻峭的區域改進其計算時所產生之截斷誤差。其一為靜力一致法，此方法重點是靜力方程式中垂直方向之變數採交錯網格排列，另一為 Zheng and Liou (1986) 所提方法，他們計算方法是將氣壓梯度力分為初始等壓面之氣壓梯度值及與初始場之偏差值兩部份，其中偏差值是在 σ 面上每一時距均計算而初始值只在初始等壓面上計算

一次即可。第二種方法在原作者之論文中漏失一項，不幸地，此項會導致頗大的截斷誤差。

利用理想個案來探討舊方法與交錯網格所計算得氣壓梯度力之確切值。以地形最高為 2 公里，網格距離為 45 公里的理想地形做測試，結果顯示兩種方法之差異不大。採用實際資料實際地形做測試，現行作業版與 Zheng and Liou 的結果相似，而交錯網格之靜力一致法，海平面氣壓之預報場比其他兩種方法約低 1 — 2 mb，且具有較小尺度之擾動，但不時在臺灣附近出現的一小低壓中心，交錯網格之預報結果較其他兩種方法之預報結果不明顯。我們利用不同方法計算氣壓梯度力，到目前為止，所有的改進均很小，未來我們將繼續進行更多的個案研究。

五、參考文獻

- Arakawa, A. and M. Suarez, 1983: Vertical differencing of the primitive equations in sigma coordinates, *Mon. Wea. Rev.*, 111, 34-45.
- Gary, J. M., 1973: Estimate of truncation error in transformed coordinate, primitive equation atmospheric models, *J. Atmos. Sci.*, 30, 223-233.
- Janjic, Z. I., 1977: Pressure gradient force and advection scheme used for forecasting with steep and small scale mountain, *Contrib. Atmospheric Phys*, 50, 186-199.
- Mesinger, F., 1982: On the convergence and error problems of the calculation of the pressure gradient force in sigma coordinate models, *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, 19, 105-117.
- Mesinger, F., and Z. Janjic, 1985: Problems and numerical methods of the incorporation of mountains in atmospheric models, *Lectures in Applied Mathematics*, Vol. 22-Part 2, American Meteorological Society, Boston, pp. 81-120.
- Smagorinsky, J., R. F. Strickler, W.E. Sangster, S. Manabe., J.I. Holloway, Jr., and G. D. Hmbree, 1967: Prediction experiments with a general circulation model, *Proc. Internat. Sympos. on Dynamics of large scale atmospheric processes (Moscow, 1965)*, Izdatel'stvo Nauka, Moscow, pp. 70-134.
- Zheng, Q. and K.-N. Liou, 1986: Dynamic and thermodynamic influence of the Tibetan plateau on the atmosphere in a general circulation model. 43, 1340-1354.

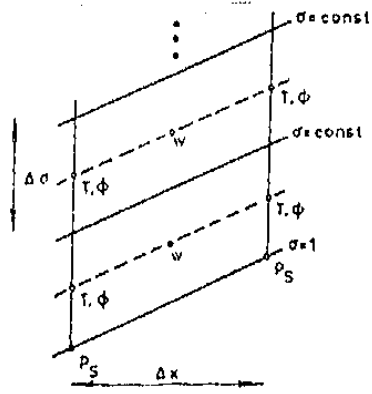


圖 1 垂直非交錯網格排列之示意圖，此種網格配置所計算而得之氣壓梯度力為靜力不一致。

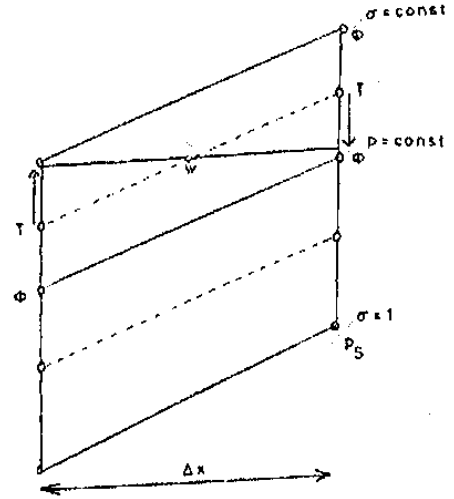


圖 2 垂直交錯網格排列之示意圖，此種網格配置所計算而得之氣壓梯度力為靜力一致。

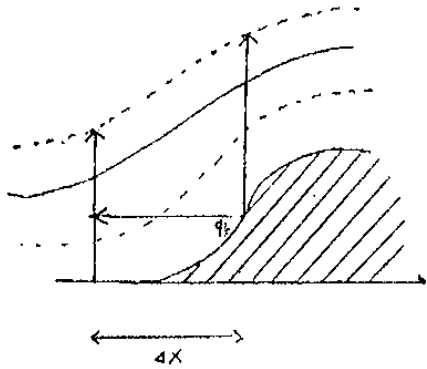


圖 3 說明在等面面上常溫且有地形的接近兩點，計算其氣壓梯度力為零之示意圖。

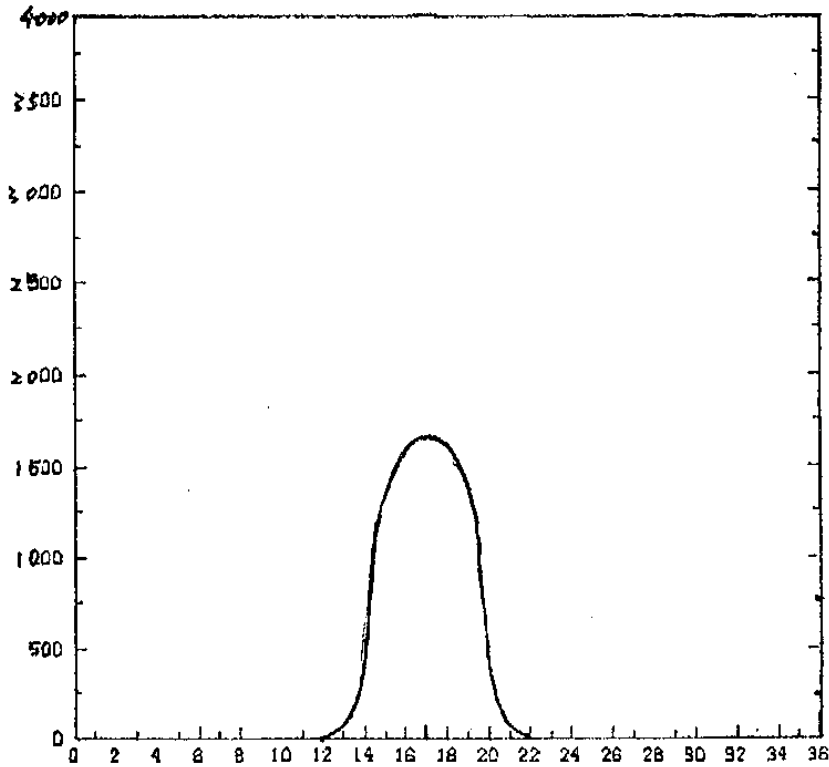


圖 4 理想個案的地形剖面圖。

