

以經驗正交函數探討梅雨個案的三維結構

李 衍 民 林 振 台

海軍氣象中心

摘 要

鋒面在梅雨系統裡扮演著一個主要的角色已為眾所皆知。水平方向的鋒生包括拉伸變形、輻合輻散、渦度、風切變形這四個重要項目。根據風的定律，我們可把風場分為旋轉風和輻散風以探討鋒生的四個項目，那麼，就必須求解流函數與速度位。既然不同氣壓層之間的相關可用經驗正交函數的三維展開來表示；則在天氣系統的三維結構內，主分量就成為氣象場的分佈性質。本文之中是以梅雨系統的個案為例來探討三維氣象場的結構。

壹、前 言

梅雨是台灣地區的重大災變天氣系統之一。在東亞地區的梅雨期間，時常可見一道滯留鋒面從日本附近經過台灣而延伸至華南。鋒面系統的結構與降水型態息息相關，鋒生、鋒消的動力過程更是研判梅雨天氣之時不可或缺的要害。欲探討梅雨三維結構，首先就要由水平向的鋒生及垂直向氣壓層之間的環流交互作用予以著手。水平方向的鋒生主要角色有四：風切變形、輻合輻散、渦度、拉伸變形。水平風場包括旋轉效應和輻散效應，所以可分為旋轉風和輻散風兩部份，分別以流函數和速度位的水平梯度來表示。至於垂直向的相關，本文引借經驗正交的理論來分析，這是因為經驗正交函數在分析天氣圖之時，提供了一種非常便利的途徑，那就是只要憑藉著一小組數字就能描述天氣情況，因此可用來定義或類推天氣的型態。本文以經驗正交函數展開處理三維氣象場，可明瞭大氣垂直結構的變異性；對於天氣型態的主要結構也易於觀察。

貳、資料來源和研究方法

本文係選用1975年6月10日格林威治零時的高空資料作為個案分析及研究之用。涵蓋的範圍是從 10°N 至 60°N ， 85°E 至 150°E ，包括中國東南沿海、蒙古、中南半島、日本、韓國及西太平洋區域。所收集的高空資料計分九層，即850mb, 700mb, 500mb, 400mb, 300mb, 250mb, 200mb, 150mb, 100mb等定壓層，包括高度、風向及風速等觀測資料；本文所引用的網格點數值，都已用客觀分析的過程處理過了。

本文的分析風場是先由平衡方程以觀測的三維高度場求出三維的旋轉風場，其中，為了滿足熱力風關係，並不直接把高度場代入平衡方程之中，而是將三維高度場的每一個主分量 (principle component) 代入平衡方程求出三維流場的主分量，再組合成三維流場，然後，以流函數求出各氣壓層的旋轉風場。其次，以每層的觀測風場算出輻散量，再解出速度位，然後，以速度位求出二維輻散風場，同理，各層都如此，故可得三維輻散風場。注意此處三維輻散風場是分層求得，但是，三維

旋轉風場却不是分層求得的。

叁、經驗正交的理論和應用

為了易於解釋起見，本文以二階張量的形式表示經驗正交函數的運算性質。令 $Z(a, k)$ 為自變數 a 和參數 k 的函數，例如 Z 代表三維高度場， a 代表垂直向的氣壓層序號，本文之中， $a=1$ 代表著 850 mb 層， $a=2$ 代表著 700 mb 層，其餘各層依此類推。 k 代表某網格點的編號，本文的二維網格矩陣為 20×19 的形式，所以 k 介於 1 至 380 之間。以相同的第 a 層而言，二維高度場矩陣表為 $Z(k)$ ，若考慮不同氣壓層的高度場，亦即三維高度場矩陣應表為 $Z(a, k)$ ，用二階張量可寫為 Z_{ak} ，那麼 a 與 k 就變成 Z 的下標，在計算時很方便。現在，根據經驗正交函數展開的理論，知道

$$Z_{ak} = \bar{Z}_a + \hat{Z}_{nk} \gamma_{an} \dots\dots\dots(1)$$

其中 \bar{Z}_a 是第 a 層所有網格點的高度平均值， \hat{Z}_{nk} 是三維高度場的主分量， γ_{an} 是三維高度場的協方差 (covariance) 矩陣的全部固有向量構成的矩陣，下標 n 為重複指標 (dummy index)，表示兩個變量是乘積的數列之和。

本文以經驗正交函數展開原理求解平衡方程以求解三維旋轉風場，而不直接以各氣壓層的二維高度場求解各氣壓層的二維旋轉風場，其原因是平衡方程只定義二維無輻散大氣中，氣壓梯度力、科氏力、平流慣性力這三者處於平衡狀態時，風場和高度場之間的平衡關係。它只定義了二維平衡過程，亦即每一氣壓層有一個獨立的方程式，但在垂直向却沒有相互配合，無法滿足熱力風關係，可能會有不穩定的溫度遞減率，因而使平衡方程的意義失效。為了確保各氣壓之間的熱力風和靜穩定度的關係，所以用三維高度場的每一個主分量代替平衡方程中的每一氣壓層的高度場；由於同一地區的高度場垂直相關本來就很大，當其以經驗正交函數展開之時，收斂非常迅速，以本文個案而言，僅需四個模 (mode) 就能代表變異數的 99.5%，這種現象在資料壓縮上相當有用。本文以經驗正交函數求解

平衡方程的計算步驟如下：

(一) 求出三維重力位場 $g \cdot Z_{ak}$ 的協方差矩陣 Q_{aa} ：

$$Q_{aa} = g^2 (Z_{ak} - \bar{Z}_a)(Z_{ak} - \bar{Z}_a) \dots\dots\dots(2)$$

其中 g 代表重力加速度常數。

(二) 求出 Q_{aa} 的全部固有向量所構成的矩陣 γ_{an} 。

(三) 求出主分量 \hat{Z}_{nk} ：

$$\hat{Z}_{nk} = \gamma_{an} (Z_{ak} - \bar{Z}_a) \dots\dots\dots(3)$$

(四) 以 \hat{Z}_{nk} 代替平衡方程中的高度場，求出流場主分量 $\hat{\psi}_{nk}$ ：

$$f_k \nabla^2 \hat{\psi}_{nk} + \nabla f_k \cdot \nabla \hat{\psi}_{nk} = g \nabla^2 \hat{Z}_{nk}$$

其中 f_k 是第 k 個網格點的科氏參數值。

(五) 以流場主分量矩陣結合固有向量矩陣求出三維流函數之值：

$$\bar{\psi}_{ak} = \bar{\psi}_a + \hat{\psi}_{nk} \gamma_{an} \dots\dots\dots(4)$$

其中 $\bar{\psi}_a$ 為任一常數，可被假設為零。

肆、鋒生的四類氣象場計算過程

風場 \vec{V} 可分為兩部份，其中之一為旋轉風場 \vec{V}_ψ ，另一為輻散風場 \vec{V}_χ ，兩者關係為

$$\vec{V} = \vec{V}_\psi + \vec{V}_\chi \dots\dots\dots(5)$$

其中 $\vec{V}_\psi = \vec{k} \times \nabla \psi$ ， $\vec{V}_\chi = \nabla \chi$ 流函數 ψ 、速度位 χ 和風場的關係為

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \nabla^2 \chi \dots\dots\dots(6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \nabla^2 \psi \dots\dots\dots(7)$$

$$u = \frac{\partial \chi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \dots\dots\dots(8)$$

$$v = \frac{\partial \chi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \dots\dots\dots(9)$$

若令 A 、 B 、 C 、 D 代表鋒生的位伸變形項、輻合輻散項、渦度項、風切變形項，那麼

$$A = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \dots\dots\dots(10)$$

$$B = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \dots\dots\dots(11)$$

$$C = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \dots\dots\dots(12)$$

$$D = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \dots\dots\dots(13)$$

本文為了研究此四項的三維結構，仍用經驗正交函數對每一項分別處理，亦即

$$A_{nk} = \bar{A}_n + \hat{A}_{nk} (\gamma_A)_{nk} \dots\dots\dots(14)$$

$$B_{nk} = \bar{B}_n + \hat{B}_{nk} (\gamma_B)_{nk} \dots\dots\dots(15)$$

$$C_{nk} = \bar{C}_n + \hat{C}_{nk} (\gamma_C)_{nk} \dots\dots\dots(16)$$

$$D_{nk} = \bar{D}_n + \hat{D}_{nk} (\gamma_D)_{nk} \dots\dots\dots(17)$$

其中 \bar{A}_n 、 \bar{B}_n 、 \bar{C}_n 、 \bar{D}_n 分別為第 a 層所有網格點的 A、B、C、D 項的平均值； \hat{A}_{nk} 、 \hat{B}_{nk} 、 \hat{C}_{nk} 、 \hat{D}_{nk} 分別為 A、B、C、D 項的三維主分量；另外 $(\gamma_A)_{nk}$ 、 $(\gamma_B)_{nk}$ 、 $(\gamma_C)_{nk}$ 、 $(\gamma_D)_{nk}$ 分別為三維 A、B、C、D 項的協方差矩陣的全部固有向量構成的矩陣。

伍、結果分析與討論

以拉伸場而言，由圖一可知，第一個主分量的主要特徵是鋒面附近的強烈拉伸現象和蒙古高壓的南北向拉伸現象，第二個主分量的主要特徵是鋒面後方的南北向拉伸情形，第三個主分量的主要特徵是鋒面前方的南北向拉伸情形，第四個主分量的主要特徵是鋒面因綫區的南北拉伸細微結構。

以輻散場而言，由圖二可知，第一個主分量的主要特徵是鋒面前方的輻合現象和鋒面後方的輻散現象，第二個主分量的主要特徵是鋒面右半段附近的輻合輻散情形，第三個主分量的主要特徵是鋒面右半段附近的輻散情形，第四個主分量的主要特徵是鋒面左半段後方的輻散細微結構。

以渦度場而言，由圖三可知，第一個主分量的主要特徵是阿留申低壓的強烈氣旋式環流現象，第二個主分量的主要特徵是鋒面因綫區南邊的反氣旋式環流情形，第三個主分量的主要特徵是太平洋高壓，第四個主分量的主要特徵是南海北邊的反氣旋

式環流的細微結構。

以風切場而言，由圖四可知，第一個主分量的主要特徵是鋒面右半段的強烈風切變形現象，第二個主分量的主要特徵是阿留申低壓區的風切情形，第三個主分量的主要特徵是鋒面因綫區附近的風切情形，第四個主分量的主要特徵是鋒面後方的風切細微結構。

陸、結 論

由表一可知，拉伸場和渦度場的第一個固有值佔總變異數的50%以上，輻散場和風切場的第一個固有值佔總變異數的39%左右，很明顯地顯示梅雨鋒生的三維結構以拉伸效應和渦度效應的垂直相關較為顯著，尤其是渦度場更是如此，這是由於流場和高度場的動力過程關係密切所致。至於輻散場和風切場因局部地區的變化較大，所以分佈的範圍較為零碎，因此垂直相關較不顯著；另外，高層輻散必伴隨著低層輻合，則大氣的正壓性質並不比斜壓性質明顯，也是原因之一。在本文之中，四類氣象場第一個主分量至第四個主分量的主要特徵顯示整道鋒面前後的強烈變形場結構、以及暖鋒部份或冷鋒部份附近的斜壓結構，還有阿留申低壓、蒙古高壓、太平洋高壓的垂直結構與梅雨鋒面分佈的關係。它意味著梅雨鋒面與上述天氣系統的消長息息相關，因此，經驗正交函數在三維氣象場診斷分析方面的實用性是很可觀的

參考文獻

1. 王時鼎，1970：論台灣之梅雨——台灣長期天氣預報問題研究之四。氣象預報與分析，第44期，12~20頁。
2. 紀水上，1978：台灣梅雨之綜觀氣候研究。中國文化大學地學研究所碩士論文，83頁。
3. 陳泰然、紀水上，1978：台灣地區梅雨個案之中幅度系統、觀測誤差、平衡與Ω值之分析。台大大氣科學系研究報告 Mei-Yu-002，40頁。
4. 陳泰然，1982：高等天氣學。台大大氣科學系

, 170 頁。

5. 曾忠一, 1984 : 動力預報的基本方程。中央研究院物理研究所, 122 頁。
6. 邱爾文, 1984 : 經驗正交函數在氣象上之應用。華岡氣象第 7 期, 37 ~ 39 頁。
7. 林和, 1986 : 經驗正交函數的物理意義。第四屆全國大氣科學學術研討會論文彙編, 547~553 頁。
8. 陳熙揚, 1986 : 梅雨之數值模擬。中國文化大學地學研究所博士論文, 265 頁。
9. 馬汝安, 1987 : 台灣地區梅雨期個案之主分量分析。氣象預報與分析, 第 110 期, 13~20 頁。
10. 詹志正, 1987 : 數值預報初始化的試驗。中國文化大學地學研究所碩士論文, 87 頁。
11. Brier, G.W. and G.T. Meltesen, 1966: Eigenvector analysis for prediction of time series. *J. Appl. Meteor.*, 15, 1307-1312.
12. Ellsaesser, H.W., 1968: Comparative tests of wind laws for numerical weather prediction. *Mon. Wea. Rev.*, 96, 277-285.
13. Lorenz, E.N., 1956: Empirical orthogonal functions and statistical weather prediction. Scientific Report No.1, Statistical Forecasting Project, Massachusetts institute of technology, Dept. Meteorology, Cambridge, 14-29.
14. Lyons, S.W., 1982: Empirical orthogonal function analysis of Hawaiian rainfall. *J. Appl. Meteor.*, 21, 1713-1729.
15. Schlatter, T.W., 1975: Some experiments with a multivariate statistical objective analysis scheme. *Mon. Wea. Rev.* 103, 246-257.
16. Singh, S.V. and R.H. Kripalani, 1986: Application of Extended Empirical Orthogonal Function analysis to interrelationships and sequential evolution of monsoon field, *Mon. Wea. Rev.*, 114, 1603-1610.

①

三維拉伸場協方差矩陣的九個固有值分析表			
序號	固有值(10^{-5}sec^{-2})	百分率(%)	累積百分率(%)
1.	57.01	52.09	52.09
2.	16.88	15.42	67.51
3.	10.07	9.21	76.72
4.	6.66	6.09	82.81
5.	6.18	5.65	88.46
6.	4.72	4.31	92.77
7.	3.08	2.81	95.58
8.	2.63	2.40	97.98
9.	2.21	2.02	100.00
總計	109.44	100.00	

②

三維輻散場協方差矩陣的九個固有值分析表			
序號	固有值(10^{-5}sec^{-2})	百分率(%)	累積百分率(%)
1.	3796.61	38.10	38.10
2.	1955.04	19.62	57.72
3.	1111.75	11.15	68.87
4.	1051.30	10.55	79.42
5.	642.79	6.45	85.87
6.	430.64	4.32	90.19
7.	407.71	4.09	94.28
8.	346.86	3.38	97.76
9.	222.72	2.24	100.00
總計	9965.42	100.00	

③

三維渦度場協方差矩陣的九個固有值分析表			
序號	固有值(10^{-5}sec^{-2})	百分率(%)	累積百分率(%)
1.	65.52	59.68	59.68
2.	13.24	12.05	71.73
3.	8.46	7.71	79.44
4.	6.95	6.33	85.77
5.	5.62	5.12	90.89
6.	4.35	3.96	94.85
7.	2.57	2.34	97.19
8.	1.94	1.79	98.98
9.	1.12	1.02	100.00
總計	109.80	100.00	

④

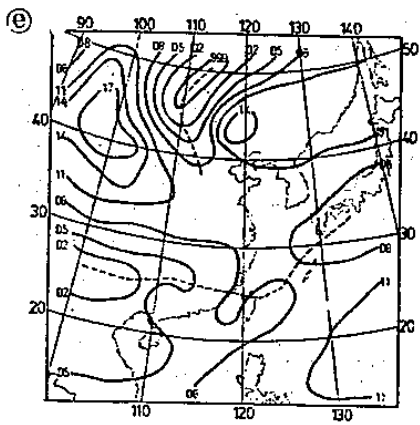
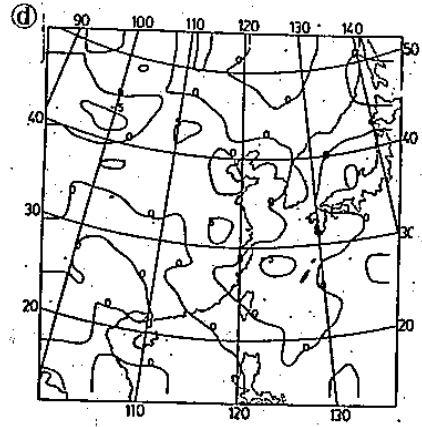
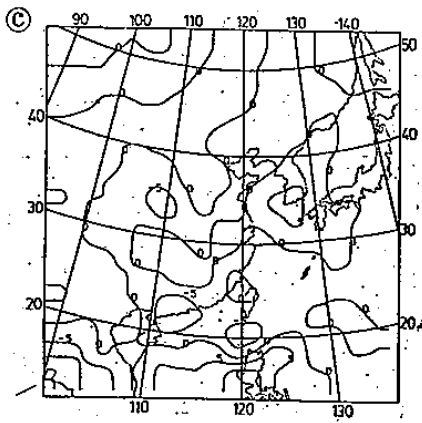
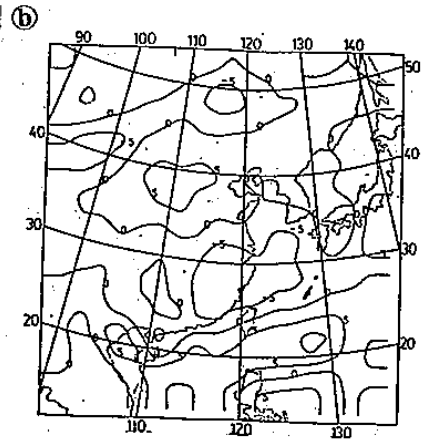
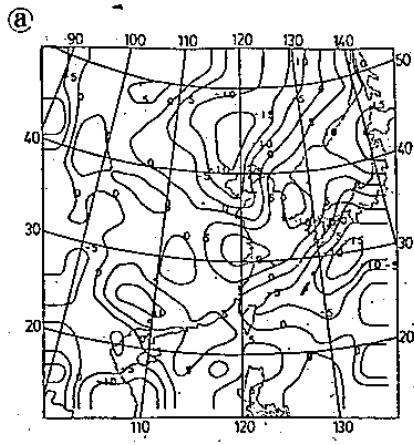
三維風切場協方差矩陣的九個固有值分析表			
序號	固有值(10^{-4}sec^{-2})	百分率(%)	累積百分率(%)
1.	3715.88	39.74	39.74
2.	1524.47	16.30	56.04
3.	1027.34	10.99	67.03
4.	886.53	9.48	76.51
5.	697.90	7.46	83.97
6.	623.62	6.67	90.64
7.	446.53	4.78	95.42
8.	276.85	2.96	98.38
9.	151.97	1.62	100.00
總計	9351.10	100.00	

表一：①三維拉伸場的垂直相關分析

②三維輻散場的垂直相關分析

③三維渦度場的垂直相關分析

④三維風切場的垂直相關分析



圖一：三維拉伸場的主分量分佈

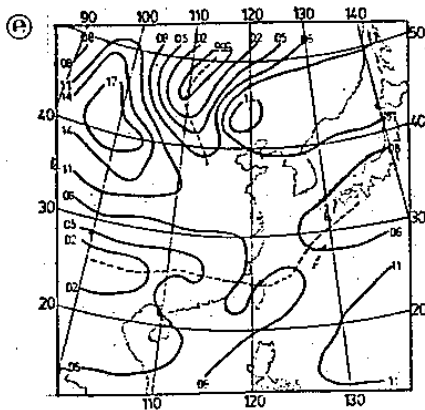
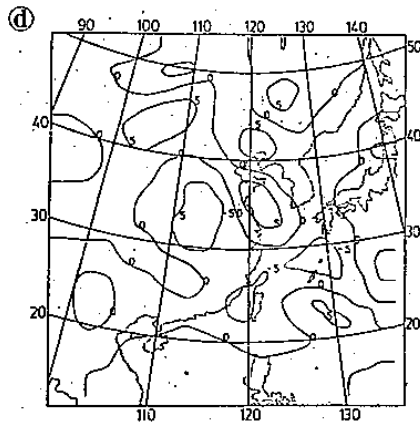
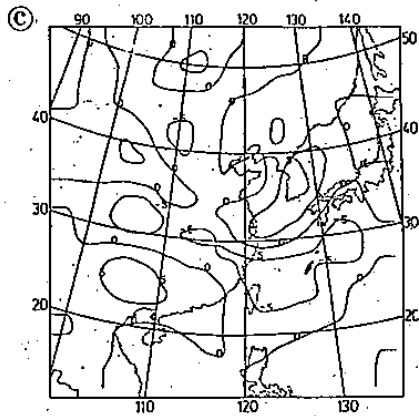
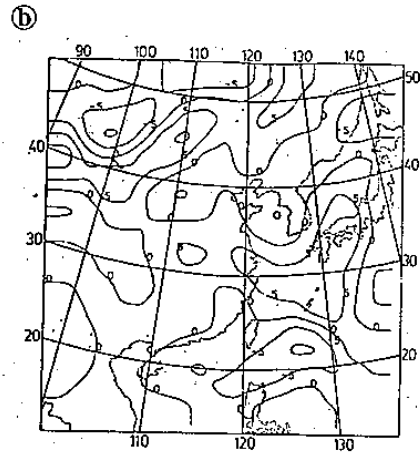
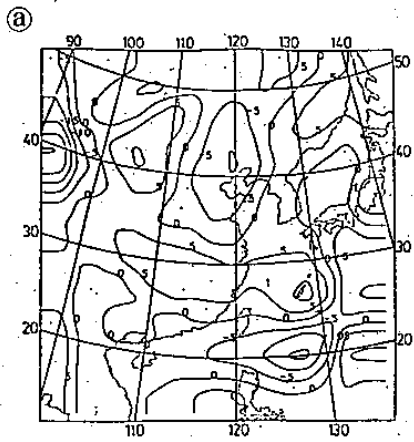
Ⓐ 第一個主分量

Ⓑ 第二個主分量

Ⓒ 第三個主分量

Ⓓ 第四個主分量

Ⓔ 海平面氣壓 (實線) 與鋒 (虛線)



圖二：三維輻散場的主分量分佈

Ⓐ 第一個主分量

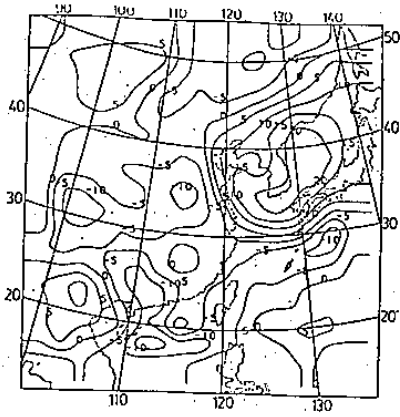
Ⓑ 第二個主分量

Ⓒ 第三個主分量

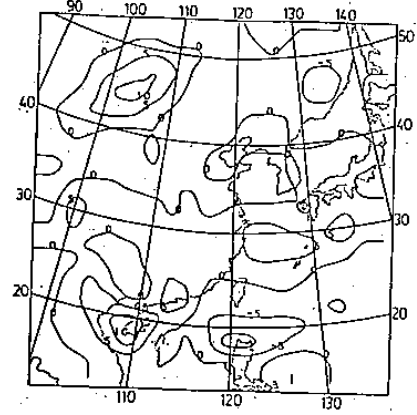
Ⓓ 第四個主分量

Ⓔ 海平面氣壓（實線）與鋒（虛線）

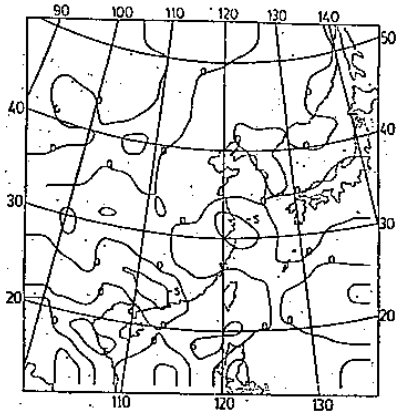
(a)



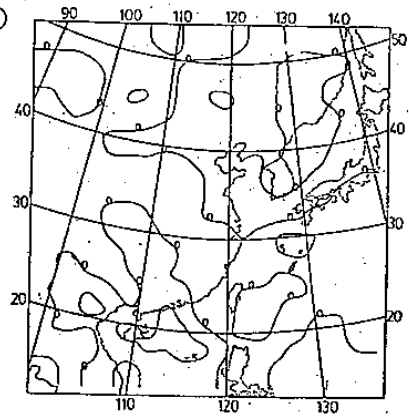
(b)



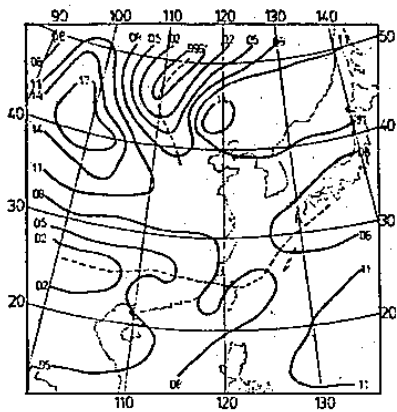
(c)



(d)



(e)



圖三：三維渦度場的主分量分佈

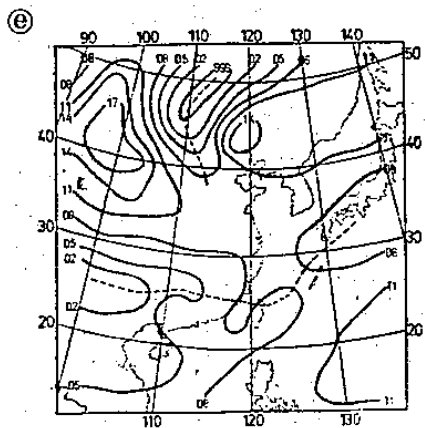
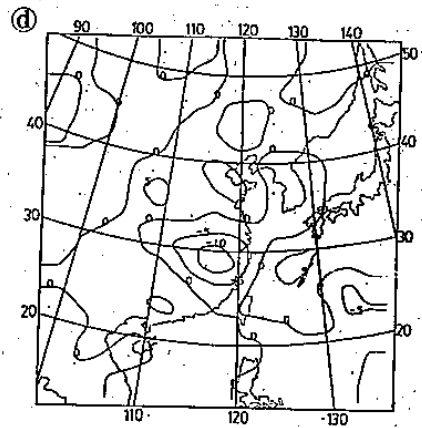
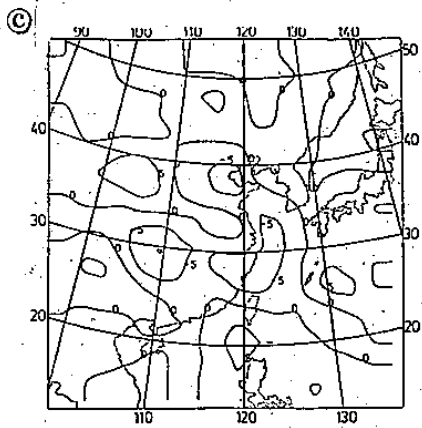
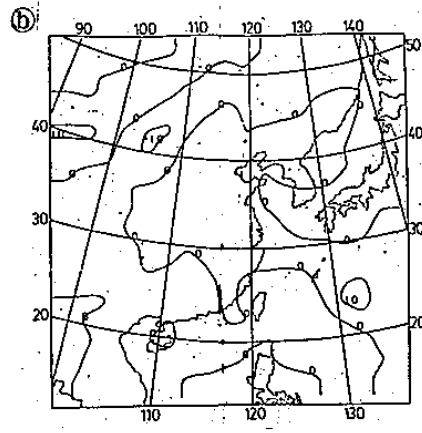
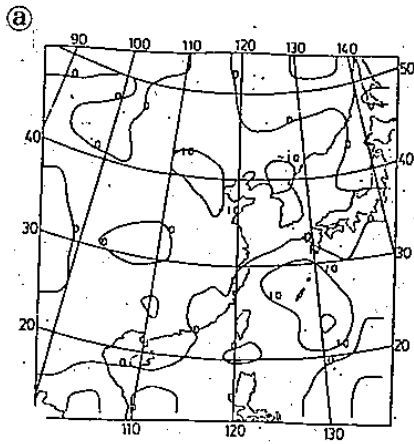
Ⓐ 第一主分量

Ⓑ 第二主分量

Ⓒ 第三主分量

Ⓓ 第四主分量

Ⓔ 海平面氣壓 (實線) 與鋒 (虛線)



圖四：三維風切場的主分量分佈

- ① 第一主分量
- ② 第二主分量
- ③ 第三主分量
- ④ 第四主分量
- ⑤ 海平面氣壓（實線）與鋒（虛線）

A CASE STUDY ON THE THREE
DIMENSIONAL STRUCTURE OF MEI-YU
SYSTEM BY USING THE EMPIRICAL
ORTHOGONAL FUNCTION

Y.M. LEE

J.T. LIN

ABSTRACT

It is generally recognized that the front plays a primary role in Mei-Yu system. The frontogenesis of horizontal wind field has four important terms including stretching deformation, divergence, vorticity and shearing deformation. In order to investigate these four terms, we can divide the wind field into the rotational part and the divergent part from the wind laws, thus, the process of solving the stream function and the velocity potential is needed. Since the empirical orthogonal function is able to represent the relationship among different pressure levels by three dimensional expansion, the principle components turn out to be the distributive property of meteorological field in the three dimensional structure of weather system. In this context, a case study of Mei-Yu system is applied as an instance.