

緩和法求解過程中的一致性問題

徐天佑

空軍氣象中心

李嗣瀚

空軍官校

潘大綱

空軍氣象中心

摘要

診斷分析對天氣學的理论與發展扮演重要的角色，因此診斷分析之準確性影響甚巨。定量分析方面數值計算若採用不當的方式 (scheme) 和不當的網格點容易造成誤差，尤其緩和法求解之過程中可能會造成網格點計算不一致，為避免此種不一致的情形計算時選用半交錯網格 (semi-staggered grid) 點，可以得到良好的效果。

一、前言

大氣各種現象之物理機制經多人努力已有完善之理論，在定量方面之計算首先由 Richardson 以定差 (finite difference) 法用於數值預報，當時利用龐大人力計算，預報結果與實際相差甚大，其所預報的氣壓變化，竟超過實際十至一百倍之多，由於此項失敗使得數值預報幾乎乏人問津，停頓幾達 25 年之久。

探討其失敗原因，在差分法計算過程中當求解方程式的累次解之時，觀測的小誤差或數值方法所產生之計算誤差 (computational error) 被放大的結果，最後放大的誤差反而掩蓋了所求之物理解，也就是當 $d \leq c \Delta t$ 時 (d 網格點間距， Δt 時間間隔， c 方程式所容許之最快速度) 會產生計算不穩定 (computational instability)。在實際的大氣中包括各種波動，從快速之聲波到緩慢的 Rossby 波，行星波均全攬無遺，但是大氣中大範圍系統之變化却以 Rossby 波為主，因而在探討此種主要系統的特性時，需先經過過濾手續以將之由複雜的大氣運動中突出。Richardson 當初嘗試數值預報時即因未曾考慮濾波過程致各種波動全部存在，波數 c

的範圍很大， $\Delta x \leq c \Delta t$ 的計算穩定條件未能滿足而遭至失敗，今日的數值預報工作人員對於濾波、網格與時間之選用均採取適當之處理，以避免不當的網格系統所造成的誤差 (aliasing)，本文針對此點進行探討，以期減少各種誤差同時求取網格點計算過程中的內部一致性，使其結果能正確的代表大氣之各種特性。

二、數值計算時所採用之步驟

在數值計算時因觀測站並非恰好位於網格點上，因此網格點之各種變數須經過內插，此種內插過程通常以客觀分析 (Objective analysis) 處理，良好的客觀分析應具備：①內插，②除錯，③勻修，④內部一致性 (曾，1978)。一般之客觀分析 (Cressman, 1959, Imman, 1970, Barnes, 1973) 對前三項均能適合，而第四項內部一致性一直為氣象學家所強調；Sasaki (1958) 首先提出變分法，探討內部一致性之處理方式，而現已有多人用於診斷分析與預報之用，曾氏 (1976) 為文介紹有關變分分析之 50 篇論文和研究報告。晚近曾氏 (1976, 1977) 利用變分法處理東亞天氣資料之高度場，溫度和風場之分析，其結果相當理想，

在垂直運動方面曾氏(1978)利用變分法及 P (壓力) 座標求各定壓層的大氣垂直速度, 在地形平坦之區域實為一甚佳之方法, 但東亞地形較為複雜我國大陸西部大部份未達 850 mb, 是以 P 座標在處理下邊界問題有其自然限制, 若採用隨地形變化之 σ (SIGMA) 座標可得更佳之結果 (張, 徐 1982), 但其在數值計算時作用之網格系統, 若改為半交錯網格 (simi-staggered grid) 應更理想, 茲討論如下。

三、變分原理和垂直運動求解之簡介

為求適當處理下邊界問題我們採用隨地形變化之 σ 座標, 在資料分析採用 Barnes (1973) 客觀分析 (詳見張, 徐 1982)。

$$\sigma = \frac{P}{\pi} \quad P: \text{任意一點之氣壓,}$$

$$\pi: \text{地面氣壓 (非海平面氣壓)。$$

ω 與垂直運動 $\dot{\sigma}$ 之關係如下:

$$\omega = \pi \dot{\sigma} + \sigma \left(\frac{\partial \pi}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \pi \right) \quad \dots\dots\dots(1)$$

V 為水平風場以上式可直接用運動學法求解 ω 值, 但誤差甚大, 為避免此誤差可採變分佳化法 (Variational optimization analysis) 改進, 定義變分量 E 為:

$$E = \iiint \left\{ \frac{1}{2} (\pi u - \pi \tilde{u})^2 + \frac{1}{2} (\pi v - \pi \tilde{v})^2 \right. \\ \left. + \lambda \left[\frac{\partial \pi}{\partial t} + \frac{\partial (\pi u)}{\partial x} + \frac{\partial (\pi v)}{\partial y} + \frac{\partial (\pi \dot{\sigma})}{\partial \sigma} \right] \right\} \\ \cdot dx dy d\sigma \quad \dots\dots\dots(2)$$

\tilde{u} 、 \tilde{v} 代表觀測水平風場, λ 為蘭格倫乘數 (Lagrange multiple), u 、 v 代表調整後的水平風分量, 由上式可以看出調整後的風場滿足大氣連續方程式。當變分量為極小值時, 則觀測之水平風場與調整後的水平風場其變量為最小值, 也就是符合 $\delta E = 0$ 之條件, 由此可導出下列 Euler-Lagrange 方程式:

$$\pi (u - \tilde{u}) = \frac{\partial \lambda}{\partial x} \quad \dots\dots\dots(3)$$

$$\pi (v - \tilde{v}) = \frac{\partial \lambda}{\partial y} \quad \dots\dots\dots(4)$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \sigma} = 0 \quad \dots\dots\dots(5)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + \frac{\partial (\pi u)}{\partial x} + \frac{\partial (\pi v)}{\partial y} + \frac{\partial (\pi \dot{\sigma})}{\partial \sigma} = 0 \quad (6)$$

$$\iiint \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [\lambda \delta (\pi v)] + \frac{\partial}{\partial y} [\lambda \delta (\pi u)] \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \sigma} [\lambda \delta (\pi \dot{\sigma})] \right\} dx dy d\sigma = 0 \quad \dots\dots(7)$$

由(7)式可獲得自然邊界條件

$$\lambda = 0 \quad (7)$$

而大氣之上界與下界

$$\dot{\sigma} (0) = \dot{\sigma} (1) = 0 \quad \dots\dots\dots(8)$$

將(3)式至(8)式合併

可得

$$\nabla^2 \lambda = - \int_0^1 \left[\frac{\partial (\pi \tilde{u})}{\partial x} + \frac{\partial (\pi \tilde{v})}{\partial y} \right] d\sigma \\ - \frac{\partial \pi}{\partial t} \quad \dots\dots\dots(9)$$

經過尺度分析 $\partial \pi / \partial t$ 可省略不計 (張, 徐 1982), 此種性質恰能消除大氣中之蘭姆波 (Lamb wave) 與外重力波 (External gravity wave), 因此(9)式可簡化為:

$$\nabla^2 \lambda = - \int_0^1 \left[\frac{\partial (\pi \tilde{u})}{\partial x} + \frac{\partial (\pi \tilde{v})}{\partial y} \right] d\sigma \quad \dots\dots(10)$$

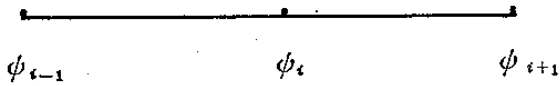
上式中 λ 值可借緩和法求解, 最後 ω 之值可合併(1)(3)(4)(5)(6)(9)而得

$$\omega = \sigma \tilde{V} \cdot \nabla \pi + \frac{\sigma}{\pi} \nabla \lambda \cdot \nabla \pi \\ - \int_0^1 \nabla \cdot (\pi \tilde{V}) d\sigma + \sigma \int_0^1 \nabla (\pi \tilde{V}) d\sigma \quad (11)$$

四、差分法網格系統之討論

求解 Poisson 方程式之變數值方法最常用的為

緩和法 (relaxation method) 求解，在數值計算時中央差分法 (central difference) 的截去誤差為二階 (second order)。故精確度很高因此用於診斷分析其效果相當好，圖一為中差法所選用之網格點，其中點 (i, j) 之導數以下式表示：



圖一：中差法所選用之網格座標。

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{i,j} \approx \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}}{2d} \dots\dots\dots(12)$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_{i,j} \approx \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1}}{2d} \dots\dots\dots(13)$$

二階導數則先求該點之左右之半個網格一階導數後再求二階導數，

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_{i,j} &\approx \frac{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{i+\frac{1}{2},j} - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{i-\frac{1}{2},j}}{d} \\ &= \frac{\phi_{i+1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j}}{d^2} \dots\dots\dots(14) \end{aligned}$$

同理

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right)_{i,j} \approx \frac{\phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1}}{d^2} \quad (15)$$

由(14)(15)可得下式

$$\nabla^2 \phi \approx \frac{\phi_{i+1,j} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i-1,j} + \phi_{i,j-1} - 4\phi_{i,j}}{d^2} \quad (16)$$

由前述之第三節(3)(4)(6)式列於下

$$\pi u = \pi \tilde{u} + \frac{\partial \lambda}{\partial x} \dots\dots\dots(3)'$$

$$\pi v = \pi \tilde{v} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \dots\dots\dots(4)'$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + \frac{\partial(\pi u)}{\partial x} + \frac{\partial(\pi v)}{\partial y} + \frac{\partial(\pi \dot{\sigma})}{\partial \sigma} = 0$$

其中 $\frac{\partial \pi}{\partial t}$ 之數量級太小省略不計，(張，徐

1982) 因此上式化簡為：

$$\frac{\partial(\pi u)}{\partial x} + \frac{\partial(\pi v)}{\partial y} + \frac{\partial(\pi \dot{\sigma})}{\partial \sigma} = 0 \quad \dots\dots(17)$$

將(3)'、(4)'代入(17)得

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\pi \dot{\sigma})}{\partial \sigma} = - \left[\frac{\partial \pi \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \pi \tilde{v}}{\partial y} \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial \lambda^2}{\partial y^2} \right] \dots\dots\dots(18) \end{aligned}$$

將以上三式以中差法表示時如下：

$$(\pi u)_{i,j} = (\pi \tilde{u})_{i,j} + \frac{\lambda_{i+1,j} - \lambda_{i-1,j}}{2d} \dots\dots(19)$$

$$(\pi v)_{i,j} = (\pi \tilde{v})_{i,j} + \frac{\lambda_{i,j+1} - \lambda_{i,j-1}}{2d} \dots\dots(20)$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial(\pi \dot{\sigma})}{\partial \sigma} \right]_{i,j} \\ = -1 \left\{ \left[\frac{(\pi u)_{i+1,j} - (\pi v)_{i-1,j}}{2d} \right] \right. \\ \left. + \left[\frac{(\pi v)_{i,j+1} - (\pi v)_{i,j-1}}{2d} \right] \right\} \\ = -\frac{1}{2d} \left\{ \left[(\pi \tilde{u})_{i+1,j} - (\pi \tilde{u})_{i-1,j} \right] \right. \\ \left. + \left[\frac{\lambda_{i+2,j} - 2\lambda_{i,j} + \lambda_{i-2,j}}{2d} \right] \right. \\ \left. + \left[(\pi \tilde{v})_{i,j+1} - (\pi \tilde{v})_{i,j-1} \right] \right. \\ \left. + \left[\frac{\lambda_{i,j+2} - 2\lambda_{i,j} + \lambda_{i,j-2}}{2d} \right] \right\} \\ = -\frac{1}{2d} \left\{ (\pi \tilde{u})_{i+1,j} - (\pi \tilde{u})_{i-1,j} \right. \\ \left. + (\pi \tilde{v})_{i,j+1} - (\pi \tilde{v})_{i,j-1} \right\} \quad \text{(A)項} \\ - \frac{1}{4d^2} \left[\lambda_{i+2,j} + \lambda_{i-2,j} + \lambda_{i,j+2} \right. \\ \left. + \lambda_{i,j-2} - 4\lambda_{i,j} \right] \quad \text{(B)項} \dots\dots\dots(21) \end{aligned}$$

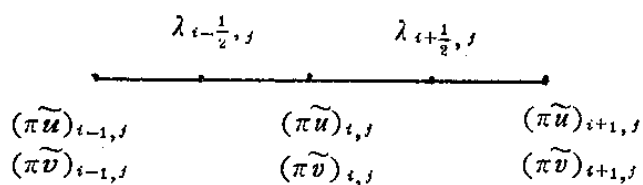
(16)式中以數值方法求解時，Laplace 項之分母為 d^2 ，而(21)中(B)項從(18)式可知亦為 Laplace 項，但其分母却變為 $4d^2$ 。

(21)式(B)項與(16)比較時可以發現，如此之數值計算隱函網格的使用不一致，為改進此點採用半交錯網格點，如圖二；可避免此種不一致，述之所下：

$$(\pi u)_{i,j} = (\pi \tilde{u})_{i,j} + \frac{\lambda_{i+\frac{1}{2},j} - \lambda_{i-\frac{1}{2},j}}{d}$$

參 考 文 獻

- Barnes, S.L., 1973 : Mesoscale objective map analysis observations. NoAA Tech. Memo. ERL NSSL-62 pp. 60.
- Cressman, G.P., 1959 : An operational objective analysis scheme. Mon. Wea. Rev. Vol-87, pp.367-374.
- Haltiner, G.J. and Williams, R.T. 1979 : Numerical prediction and Dynamic meteorology. pp. 477.
- Inman, R.L., 1970 : Paper on operational objective analysis scheme at NSSF. NOAA Tech. Memo. ERL NSSL-51. pp. 91.
- Tseng, C.Y. 1976 : Variational optimization analysis-a bibliography. Institute of physics, Academia Sinica, pp. 4.
- Sasaki, Y. 1958 : An objective analysis based on the variational method. Jour. Meteor. Soc. Jap, Vol 36, pp. 77-88.
- 張能復, 徐天佑, 1982 : 應用地形座標計算大氣垂直運動之研究。科學發展, 第十卷, 第三期 pp. 207-221。
- 曾忠一, 1978 : 大氣垂直速度計算之研究。中央研究院物理研究所集刊, 第八卷, pp. 127-154。



圖二：交錯網格座標。

$$\begin{aligned}
 (\pi v)_{i, j} &= (\pi \tilde{v})_{i, j} + \frac{\lambda_{i, j+\frac{1}{2}} - \lambda_{i, j-\frac{1}{2}}}{d} \\
 \left[\frac{\partial(\pi \dot{\sigma})}{\partial \sigma} \right]_{i, j} &= - \left\{ \left[\frac{(\pi u)_{i+\frac{1}{2}, j} - (\pi u)_{i-\frac{1}{2}, j}}{d} \right. \right. \\
 &+ \left. \left. \frac{(\pi v)_{i, j+\frac{1}{2}} - (\pi v)_{i, j-\frac{1}{2}}}{d} \right] \right\} \\
 &= - \frac{1}{d} \left\{ \left[(\pi \tilde{u})_{i+\frac{1}{2}, j} + \frac{\lambda_{i+1, j} - \lambda_{i, j}}{d} \right] \right. \\
 &\quad \left. - \left[(\pi \tilde{u})_{i-\frac{1}{2}, j} + \frac{\lambda_{i, j} - \lambda_{i-1, j}}{d} \right] \right\} \\
 &= - \frac{1}{d} \left[(\pi \tilde{u})_{i+\frac{1}{2}, j} - (\pi \tilde{u})_{i-\frac{1}{2}, j} \right. \\
 &\quad \left. + (\pi \tilde{u})_{i, j+\frac{1}{2}} - (\pi \tilde{v})_{i, j-\frac{1}{2}} \right] \\
 &\quad \text{(C)項} \\
 &\quad - \frac{1}{d^2} (\lambda_{i+1, j} + \lambda_{i-1, j} + \lambda_{i, j+1} + \lambda_{i, j-1} \\
 &\quad \text{(D)項} \\
 &\quad - 4 \lambda_{i, j}) \dots \dots \dots (22)
 \end{aligned}$$

(D)項與式(16)比較兩者在Laplace項分母項完全一致，因此採用半交錯網格計算較為合理。

五、總 結

座標網格之選取往往影響計算結果，採用適當的網格系統，能表現其適當之物理特性，交錯網格點之特性能保留較小的次綜觀尺度波動，在地轉調節過程中，重力波的性質顯得重要，因此採用交錯網格點有較好之結果 (Haltiner, Roger 1979)，同時於本文中在使用緩和法時網格點也能滿足自我之一致性，不易造成不必要的誤差，再者因交錯網格點中各變數均交錯排列，因此在數值計算過程中電算機之記憶容量可減少，所用之電算時間也可以節省。

The Consistency of the Solution with Relaxtion Method

Shyu Tian-Yow

Lee Sze-Hann

Pan Da-Gang

Weather Central

Chinese Air Force
Academy

Weather Central

ABSTRACT

It is generally accepted that diagnostic analysis play a crucial role in the developement of meteorological theorem.

Inaccurate diagnostic analysis always leads to an erroneous result. Improper scheme will make great computational errors which might ruin the real physical fields.

In this study , using simi-staggered grid scheme , we can improve the result of relaxtion method to be more accurate in numerical computational processes.