

台灣集水區乾旱週期性之初步研究¹

The Preliminary Study on the Periodicity of Drought:
in Taiwan

易 任 ²	王 如意 ³
Victor J. Yih	Ru Yih Wang
金 紹 興 ⁴	徐 享 崑 ⁵
S. H. King	S. K. Hsu

摘 要

近年來(1972年後)乾旱問題之研究廣受重視,本研究擬以台灣集水區19條主要河川及7條次要河川流域之雨量及流量資料,先應用極端值理論分佈及自迴歸積分移動平均(ARIMA)模式分析乾旱之特性及其週期性,並擬作合理之預測及進一步之研究,以供農業及水資源規劃之參考。

In recent years (after 1972), the investigations of drought have significantly attached much importance to study. This paper intended to use the rainfall data of watersheds and low streamflow data of 19 main rivers and 7 secondary rivers in Taiwan for preliminary study and attempted to study the following items: (1) To define the scopes of various droughts in Taiwan, such as agricultural droughts, meteorological droughts, hydrological droughts, etc., (2) To investigate and analyze drought probability of recurrence, duration, severity areal extension, (3) To determine the periodicity of droughts in Taiwan, by means of the theory of extreme-value distribution, and the ARIMA model. (4) To forecast droughts for agriculture and water resources operations and management. Many illustrative examples are given in this article for reference.

¹ 本研究係中國農村復興聯合委員會資助,特此申謝。

² 台灣大學農業工程學系及研究所教授。

³ 台灣大學農業工程學系及研究所副教授。

⁴ 經濟部水資源統一規劃委員會水文科科長。

⁵ 台灣大學農業工程學研究所研究生。

一 前 言

溯自1972年，全球各地區普遍遭受惡劣氣候影響及肆虐，溫度升高，雨量稀少，農作物嚴重歉收。乾旱之研究遂為當務之急，而廣泛引起世人之注意。^(3, 23)

台灣之自然環境，雨量雖豐沛（平均年雨量2,500mm），然受颱風季節之雨量影響甚巨，降雨季節及降雨時間極不勻稱，且地文因子繁雜，雨量之空間分佈亦呈不均現象，主要河川均為東西走向，落差大，河川常呈乾涸現象。

台灣地區1977年3月特別乾旱，今年3月份雨水顯著增加，但6月至8月北部地區復遭局部性乾旱侵襲⁽²⁵⁾，類似此等異常性之氣象變動，均可能帶來天然之災害。而台灣集水區乾旱週期性之研究與下列水資源及環境條件息息相關：

- 1-1 攔河堰受乾旱之影響，使其貯蓄、截流之功能失效，而且限制公共給水之最低流量，甚至於衍生水污染方面種種之棘手問題，如1977年三月台灣北部地區受乾旱之影響，台北市公共給水受限⁽²⁵⁾及新店溪上游有甚多魚類突然死亡，可見一斑。
- 1-2 如果水稻遭受乾旱，不僅減少產量，有時米粒呈茶黃色。
- 1-3 海埔新生地或較高山地，旱作田地，若缺乏土壤水份，可能引起海水滲透而發生鹽鹼之害。
- 1-4 乾旱期湖泊或池塘之魚類養殖迭遭損失，有時因水中鹽份增加致淡水魚或貝類減產。
- 1-5 農田需水量銳減，影響作物生長，甚至某些地區實施緊急輪灌，某些地區改植旱作或荒廢，對國家糧食生產有莫大影響。

綜上所述，吾人得知，有系統而深入之研究乾旱已為刻不容緩之課題，對於集水區之經營及專業區之開發研究尤為迫切。

近年來國內所作之乾旱研究可大別為四類：

(一) 乾旱分析

(1) 乾旱形成與預報

(2) 乾旱之機率分佈及迴歸週期

(3) 乾旱之防範措施

而本文所從事研究之項目計有：

(一) 應用序率繁衍(Stochastically generation)之合成方法，合成資料，尤其著重程式之設計及繁複之演算。

(二) 應用Gumbel Extreme-value Type I法分析台灣各雨量站不同迴歸週期(2年、5年、10年、25年、50年)連續最大不降雨日數並繪製成連續不降雨日數圖，以明瞭台灣各地區乾旱程度及乾旱分佈情形。

(三) 應用Gumbel Extreme-value Type III法分析台灣各主要河川流量(日最小、旬最小、月最小流量)以供農業及水資源規劃之參考。

(四) 應用ARIMA(p, d, q)模式，研究月降雨量及月流量，分析乾旱特性。

二 乾 旱 之 定 義^(2, 4, 5, 6, 8, 23)

乾旱的定義，很難遽下，各家自執一詞，莫衷一是，簡而言之，乃雨水匱乏所致。即在某一已知之水經理系統下，河溪流量不能順利供應現有民生設施及作物需水量時，所發生之週期性缺水現象。

就農業、氣象、水文各觀點言之，所謂農業乾旱(Agriculture Drought)是指某一時期因雨水不足，而使作物不能正常生長及成熟，由於缺乏水份和土壤乾燥而發生之天然災變。所謂氣象乾旱

* 括弧內數字號碼表示參考文獻號序。

(Meteorological drought) 為氣象災害之一，源自氣候異常，雨水失調之大氣自然現象⁽²³⁾。所謂水文乾旱(Hydrological drought)乃指地球表面水量供應缺乏或反常所致(降水量有效降雨逕流，貯蓄量為重要因子)，任何一水文乾旱均包含有延時(Duration)，嚴重程度(Severity or intensity)，延伸範圍(Areal extension)，重現機率(Probability of recurrence)及確定之起始及終止時段⁽⁸⁾。

茲就世界各國有關乾旱定義之文獻，摘錄於下：⁽²³⁾

2-1 英國 British Rainfall 一書：乾期(Dry spell)須至少連續 5 日不下雨，部份乾期 (Partial dry spell)須至少連續 29 日其平均雨量在 0.25^{mm} 以下。絕對乾期 (Absolute dry spell)須連續 15 日其間無一日之雨量超過 0.25^{mm} 者。

2-2 Rolf E. Huschke 於 "Glossary of Meteorology" 中解釋：乾旱一詞，為指一段相當長久時間天氣異常乾燥且缺水，使農作物生長及公共給水產生嚴重之水量不平衡現象。

2-3 Mather (1974)：當降水或貯於土壤中之水分，不足以供應作物所需之量時，即發生乾旱。

2-4 Palmer (1965)：美國氣象局 No 45 研究報告中所謂乾旱者係指：

- (一) 在某一時期內，雨量少於某一特定量 (如 48 小時少於 0.10 吋)。
- (二) 在某一時段內，降雨量未達特定之數量。
- (三) 在某一時期內，強風、高溫、低降雨量且相對濕度經常均甚小 (又稱大氣乾旱)。
- (四) 在某一時段內，土壤內之含水量，減至特定之百分比。
- (五) 在某一時間內，牧草稀少，牲畜散亂無序，常須人工飼養。
- (六) 月雨量或年雨量少於正常值之特定百分比。
- (七) 降水量不足供給人類活動所需。

2-5 Tabony (1977)：

(一) 氣象乾旱 (D_m) 為雨量 R 之離均差 $|R - \bar{R}|$ 與平均雨量 \bar{R} 之比值 $D_m = |R - \bar{R}| / \bar{R}$

若考慮勢位蒸發散 (Potential ET, E_p) 則

$$D'_m = |(R - E_p) - (\bar{R} - \bar{E}_p)| / \bar{R}$$

D_m, D'_m 之值愈大，乾旱愈嚴重。

(二) 水文乾旱 (D_h) 以水文有效雨量 (R_e) 定量，所謂水文有效雨量乃指雨水降落後經蒸發及供應土壤短缺之水分後剩餘之水量。其平均值 \bar{R}_e ，當 $R_e < \bar{R}_e$ 時即為乾旱。

其定義為： $D_h = |R_e - \bar{R}_e|$

D_h 愈大，表示乾旱愈嚴重。

(三) 草地乾旱 (D_a)：(因不同作物對乾旱之忍受性不一致，故未採用農業乾旱)

令 E_g 為作物生長之有效蒸發量

則 $D_a = E_p - E_g$ D_a 之平均為 \bar{D}_a

當 $D_a < 0$ 時，乾旱發生。

$|D_a - \bar{D}_a|$ 值愈大，表示乾旱愈嚴重。

2-6 Subrahman and Subramaniam and Subrahmanyam (1969)：

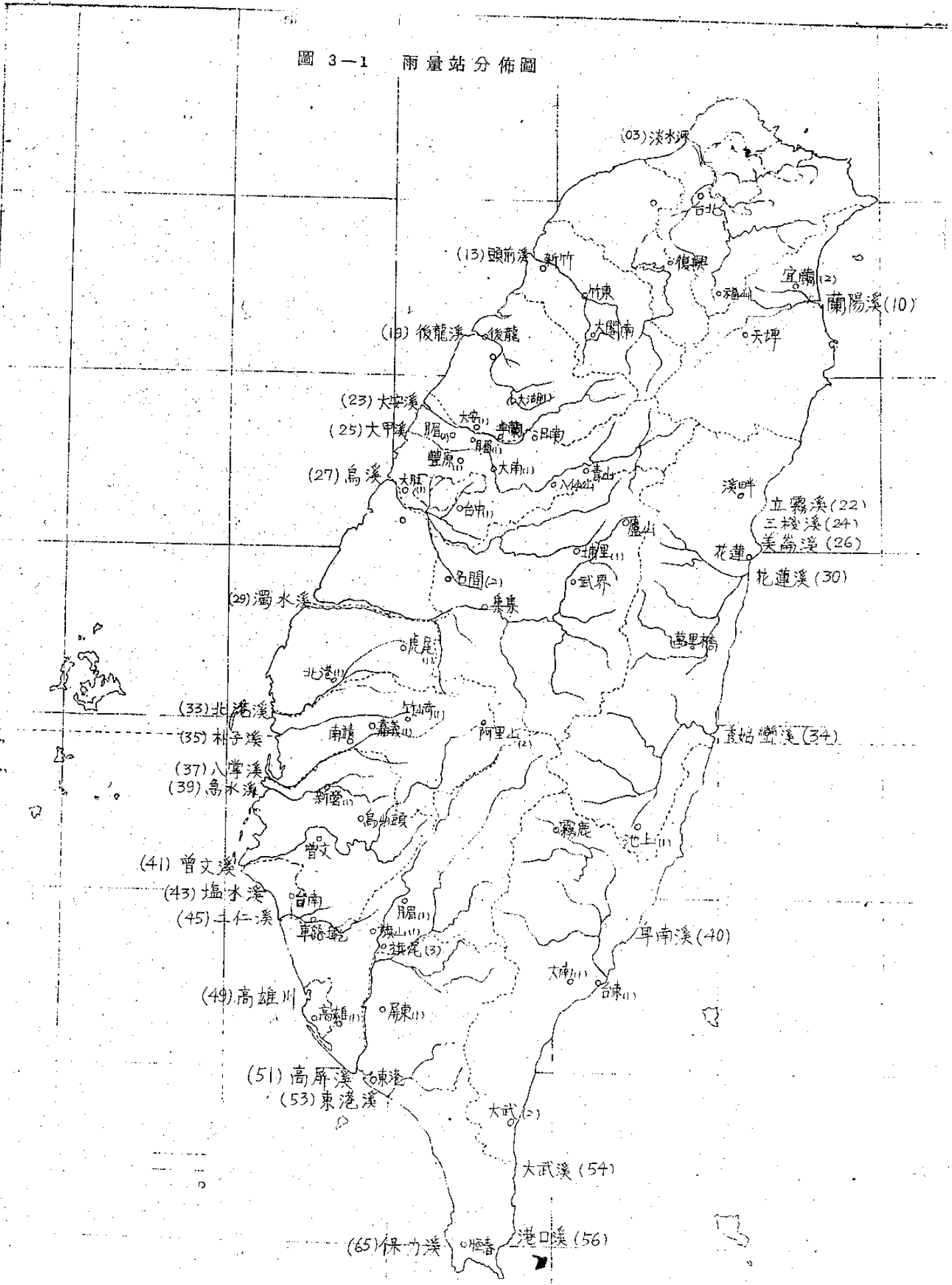
定義乾旱指數 (Aridity Index) I_a ，其意指全年不足水量佔全年需水量之百分比，用乾旱指數與中數之離差以決定乾旱程度。

令全年需水量中數為 R_m ， $R = |I_a - R_m|$

標準偏差為 σ ，則

$$R < \frac{1}{2} \sigma \quad \text{中度乾旱}$$

圖 3-1 雨量站分佈圖



$\frac{1}{2}\sigma < R < \sigma$ 較大乾旱

$\sigma < R < 2\sigma$ 嚴重乾旱

$R > 2\sigma$ 發生災情

2-7 美國：認為一個月中，凡任何24小時內之降水量均未超過0.25吋者，謂之乾旱。

2-8 蘇俄：10日之中，總降水量未超過5公釐(0.2吋)者謂之乾旱。

2-9 台灣省氣象所(即現今中央氣象局之前身)訂：凡20日以上連續無可計量之降水記錄者謂之乾旱。

2-10 本文所訂：凡降水量小於0.6公釐者視為不降雨日，連續50日以上不降雨謂之小旱(The small scale drought)，連續100日以上不降雨謂之大旱(The large scale drought)。

三 基本資料之彙集、統計、補遺及繁衍(Generation)

3-1 基本資料之彙集：

台灣位居亞熱帶，全年雨量隨季節之變化，差異甚為明顯。一般言之，旱季11月至翌年4月，即冬季、春季。本研究蒐集全省19條主要河川及7條次要河川之降水量、流量資料，資料來源為經濟部水資會所提供，特此申謝。

(一) 關於降水量資料方面：包括各選定雨量站月、年雨量記錄，連續不降雨日數統計，共有54站資料，遍及全省，如圖3-1及表3-1。

(二) 關於流量資料方面：包括各選定流量站日最小、月最小、旬最小流量及逐旬流量記錄，共45站資料，如圖3-2及表3-2。

(三) 所有資料均予以製卡建檔備用。

3-2 基本資料之統計

本研究所用之資料為經濟部水資會歸檔之民國65年以前之資料，茲列表如表3-1，3-2

表 3-1 雨量站概況表

站名	流域	記錄期間	記錄年數	歷年中發生之最大連續不降雨日數	發生時間
復興(1)	淡水河	民國元年~民國65年	56	70	民國21年
利莫干	淡水河	民國元年~民國65年	56	25	民國44年
火燒寮	淡水河	民國44年~民國65年	22	30	民國45年
台北	淡水河	民前15年~民國65年	80	32	民國57年
大關南	頭前溪	民國12年~民國65年	52	64	民國28年
竹東	頭前溪	民前9年~民國65年	74	70	民國57年
新竹	頭前溪	民前11年~民國65年	68	74	民國2年
大湖(1)	後龍溪	民前8年~民國65年	68	100	民國26年
後站	後龍溪	民國11年~民國65年	49	115	民國23年
卓蘭	大安溪	民國9年~民國65年	61	114	民國20年
大安(1)	大安溪	民國39年~民國65年	18	59	民國48年
日南	大安溪	民國25年~民國65年	41	110	民國57年
青山	大甲溪	民國29年~民國65年	34	64	民國32年
八仙山	大甲溪	民國28年~民國65年	36	69	民國57年

表 3-1 雨量站概況表

(續)

站名	流域	記錄期間	記錄年數	歷年中發生之最大連續不降雨日數	發生時間
大南(1)	大甲溪	民國5年~民國65年	61	99	民國57年
月眉(1)	大甲溪	民國4年~民國65年	57	100	" 57年
月眉(2)	大甲溪	" 25年~" 65年	35	88	" 57年
埔里(1)	烏溪	民前8年~" 65年	63	117	" 57年
名間(2)	烏溪	民國33年~" 65年	32	93	" 57年
台中(1)	烏溪	民前15年~" 65年	80	99	" 57年
豐原(1)	烏溪	民國11年~" 65年	55	99	" 57年
大肚(1)	烏溪	" 11年~" 65年	55	101	" 57年
廬山	濁水溪	" 25年~" 65年	35	74	" 57年
武界	濁水溪	" 21年~" 65年	44	45	" 53年
集集	濁水溪	民前8年~" 65年	73	122	" 57年
阿里山(2)	濁水溪	民國22年~" 65年	44	38	" 65年
阿里山(1)	濁水溪	民前4年~" 65年	69	121	" 48年
虎尾(1)	北港溪	民國3年~" 65年	66	82	" 37年
北港(1)	北港溪	" 3年~" 65年	66	117	" 57年
竹崎(1)	朴子溪	民前8年~" 65年	73	143	" 14年
南靖	八掌溪	民國4年~" 65年	62	117	" 57年
嘉義(1)	八掌溪	民前11年~" 65年	66	90	" 57年
新營(1)	急水溪	民國20年~" 65年	46	118	" 57年
烏山頭	曾文溪	" 20年~" 65年	46	110	" 57年
曾文	"	" 21年~" 56年	43	118	" 57年
台南	鹽水溪	民前15年~" 65年	80	97	" 10年
車路墘	二仁溪	民國30年~" 65年	35	127	" 57年
高雄(1)	高雄川	" 20年~" 65年	46	109	" 57年
月眉(1)	高屏溪	" 15年~" 65年	50	161	" 53年
旗山(1)	"	民前8年~" 65年	73	151	" 14年
旗尾(3)	"	民國15年~" 65年	50	103	" 54年
屏東(1)	"	民前8年~" 65年	70	102	" 12年
東港	東港溪	" 8年~" 65年	69	132	" 39年
恒春	保力溪	" 15年~" 65年	80	77	" 25年
天埤	蘭陽溪	" 9年~" 65年	68	30	" 4年
宜蘭(2)	"	民國25年~" 65年	41	29	" 49年
溪畔	立霧溪	" 41年~" 65年	25	91	" 44年
花蓮	三棧溪—美崙溪	民前11年~" 65年	76	39	" 3年
萬里橋	花蓮溪	民國17年~" 65年	35	35	" 42年
池上(1)	秀姑巒溪	" 27年~" 65年	31	81	" 29年
霧鹿	卑南溪	" 41年~" 65年	25	52	" 57年
台東(1)	"	民前11年~" 65年	75	44	" 8年
大南(1)	大南溪	民國2年~民國65年	59	58	民國65年
大武(2)	大武溪—港口溪	民國29年~民國65年	37	32	民國45年

圖 3-2 流量站分佈圖

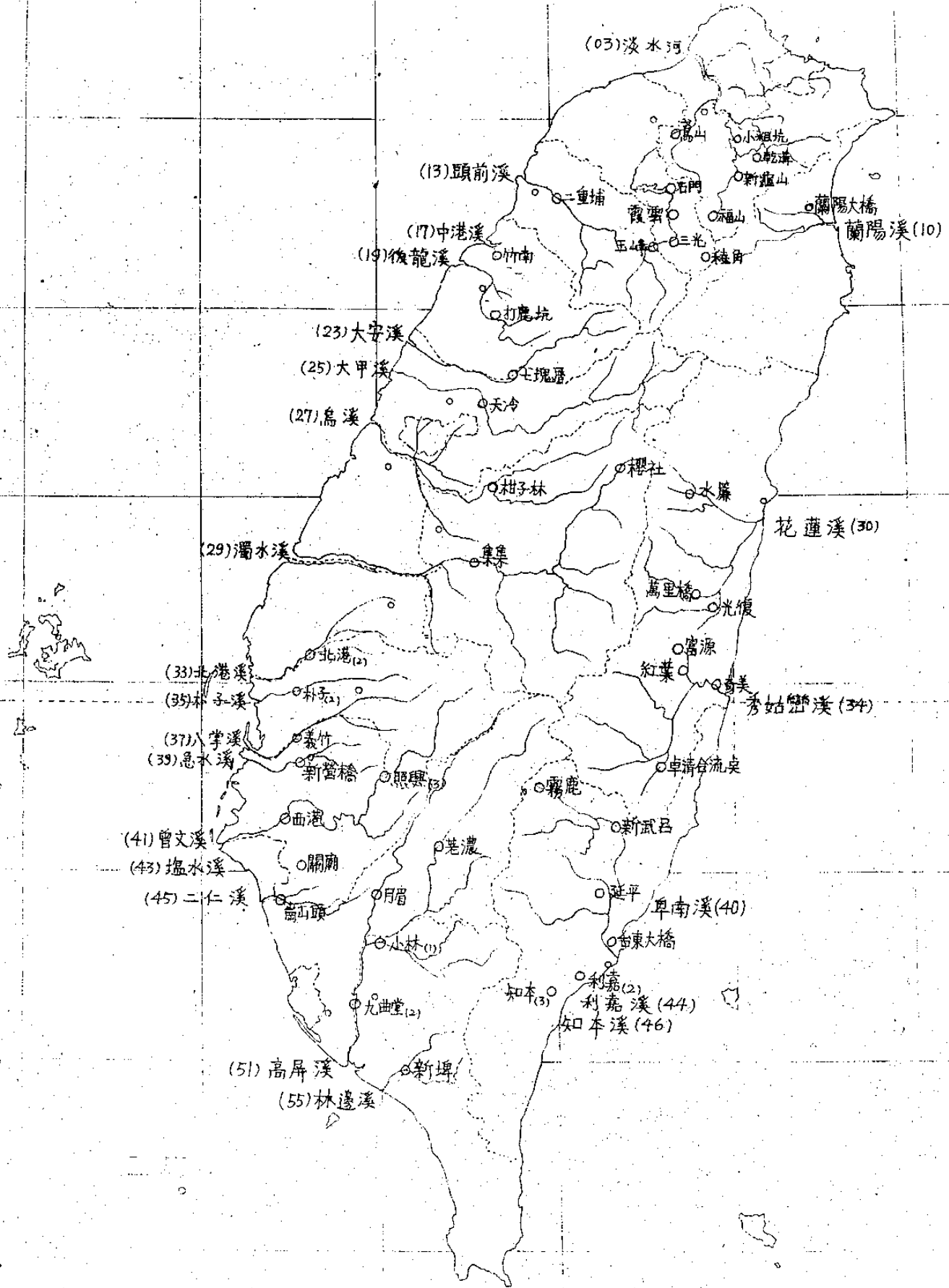


表 3-2 流量站概況表

單位：秒立方公尺(cms)

站名	流域	記錄期間	記錄年數	日最小流量	旬最小流量	月最小流量
玉峰	淡水河	民國26年~民國65年	24	1.46	21.97	73.13
稜角	"	27 ~ 65	23	1.02	10.20	31.31
石門	"	36 ~ 60	25	2.82	26.09	208.79
福山	"	27 ~ 65	28	2.55	28.08	91.83
新龜山	"	31 ~ 46	16	4.60	53.40	183.40
乾溝	"	31 ~ 65	27	0.33	4.49	14.63
小粗坑	"	20 ~ 44	20	3.70	77.40	272.20
三光	"	46 ~ 62	17	2.63	24.80	107.66
鳶山(3)	"	49 ~ 62	14	1.09	15.80	39.78
霞雲	"	52 ~ 65	14	5.15	52.30	194.52
蘭陽大橋	蘭陽溪	39 ~ 65	27	2.85	39.67	133.79
二重埔	頭前溪	40 ~ 65	26	0.25	2.14	10.24
竹南	中港溪	48 ~ 61	14	0.03	0.54	9.09
打鹿坑	後龍溪	45 ~ 65	21	0.36	4.20	21.04
七塊厝	大安溪	31 ~ 47	11	0.05	2.18	10.30
天冷	大甲溪	45 ~ 57	12	3.30	52.30	179.40
柑子林	烏溪	45 ~ 65	22	5.76	61.14	195.10
集集	濁水溪	30 ~ 65	30	15.00	197.50	763.80
櫻社	"	48 ~ 65	18	1.95	22.10	74.30
萬里橋	花蓮溪	49 ~ 65	17	2.22	32.72	106.21
水簾	"	42 ~ 65	23	5.10	51.00	160.00
光復	"	49 ~ 65	17	0.17	1.76	9.64
北港(2)	北港溪	39 ~ 65	23	0	0	0.04
紅葉	秀姑巒溪	46 ~ 58	13	0.33	4.14	15.43
富源	"	31 ~ 65	18	1.55	20.80	68.47
卓合	"	46 ~ 58	13	1.50	20.00	65.10
流點	"	48 ~ 58	11	21.00	199.00	44.50
奇美	"	48 ~ 58	11	21.00	199.00	44.50
朴子	朴子溪	39 ~ 65	26	0	0	0
義竹	八掌溪	39 ~ 65	26	0	0	0
新營橋	急水溪	30 ~ 65	16	0	0	0.94
新武呂	卑南溪	48 ~ 65	18	0.13	1.50	4.83
延平	"	46 ~ 65	20	3.60	45.36	55.67
台東大橋	"	31 ~ 65	30	0.41	6.82	53.79
霧鹿	"	45 ~ 57	13	1.80	19.12	64.11
照興(2)	曾文溪	45 ~ 61	16	0.65	8.28	30.92
西港	"	49 ~ 65	17	0	0	0
關廟	鹽水溪	30 ~ 65	23	0.03	0.83	3.34
利嘉(2)	利嘉溪	51 ~ 65	15	0	0.62	4.14
崗山頭	二仁溪	45 ~ 65	21	0	0	0.09
知本(3)	知本溪	51 ~ 65	15	0.04	0.50	2.05
小林(1)	高屏溪	44 ~ 58	15	0.05	1.16	4.71
月眉	"	48 ~ 65	18	0.08	1.67	5.41
九曲堂(2)	"	40 ~ 65	26	4.06	68.00	275.60
老濃	"	48 ~ 65	18	2.25	54.75	189.75
新埤	林邊溪	51 ~ 65	15	0.01	0.10	0.93

3-3 資料之補遺：缺測記錄須予以推補，俾得連續長期記錄以便分析。

(一) 雨量記錄補遺之方法有二：內插法(Interpolation method)及正比法(Normal ratio method)⁽¹⁹⁾，台灣集水區內地形變化頗大，故本研究採正比法。茲舉例說明如下：

如圖 3-3，某集水區內設有雨量站 A、B、C 及 X 四站，其中 A、B、C 三站記錄完整，而 X 站記錄缺漏待補，若各測站之正常年降雨量分別為 N_A 、 N_B 、 N_C 及 N_X 為已知，且雨量分別為 P_A 、 P_B 、 P_C 亦已知，則 P_X 可由下式求得

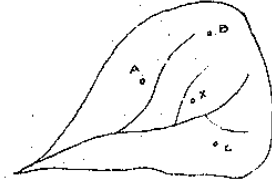


圖 3-3 雨量站記錄補遺說明圖

$$P_X = \frac{1}{3} \left(\frac{N_X}{N_A} P_A + \frac{N_X}{N_B} P_B + \frac{N_X}{N_C} P_C \right) \quad \dots \quad (3-1)$$

如附近有多站，則可以一簡式計算

$$\frac{P_X}{N_X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{P_i}{N_i} \quad \dots \quad (3-2)$$

(二) 流量記錄之補遺：應用水利局第三規劃隊逕流量補遺方法推補各站歷年流量，其方法為

$$Q_1 = Q_2 \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^N \quad \dots \quad (3-3)$$

其中 Q_1 ：推估站旬計或日流量

A_1 ：推估站流域面積

Q_2 ：實測站旬計或日流量

A_2 ：實測站流域面積

N ：常數，一般是介於 $\frac{1}{3}$ 與 $\frac{2}{3}$ 之間，本研究採用 0.5

如逕流量分析站有實測記錄，則選出記錄完整，具有長期觀測期間之鄰近流量站(以相同河川或鄰近河川為原則) 1~3 處，繪出同一時間觀測值於方格紙上，以分組平均法，求出兩站流量之關係式及相關係數，以相關係數較佳之實測流量站及關係式而補遺之。

3-4 資料之合成及繁衍^(3, 7, 9, 12, 13, 15, 17, 18)

水文資料之序率繁衍 (Stochastically generation) 觀念，始自 1914 年 Hazen 氏以 14 條河流之年平均流量時列合成 300 年之年平均流量時列。1927 年 Sudler 氏利用一組 50 張印有河流年流量之紙牌，隨機抽取，得 1000 年之人工流量資料。1955 年 Barnes 氏用亂數表 (Random table) 合成 1000 年之流量時列，所推衍之資料及均數、標準差 (Standard deviation) 與原有之資料所求得者甚近似。1961 年 Brittan 氏利用平均流量及全距 (Range) 之機率分佈，與馬可夫鏈 (Markov chain) 二種方法研究。1961 年 Julian 氏利用簡單自迴歸模式 (Simple autoregressive model) 及年降水量推衍年流量。1962 年 Thomas and Fiéring 氏推衍月流量資料，有甚佳之結果。所採用之模式乃馬可夫一階線性模式，模式中視流量資料為具常態分佈者。

$$Q_{i+1} = \bar{Q}_{j+1} + b_j (Q_i - \bar{Q}_j) + \epsilon \quad \dots \quad (3-4)$$

其中 Q_{i+1} ：第 $i+1$ 月之推衍流量

\bar{Q}_{j+1} ：第 $j+1$ 月之觀測流量平均值

Q_i : 第 i 月之推衍流量

Q_j : 第 j 月之觀測流量平均值

b_j : 第 $j+1$ 月與第 j 月之迴歸係數

e : 無意變方 (Unexplained variance) 之模擬誤差

$$\text{又 } e \text{ 之估值爲 } t\sigma_{j+1}(1-r_j^2)^{1/2} \quad \dots \quad (3-5)$$

式中 t : 亂數 (Random value), 呈常態分佈,

期望值為 0, 變方為 1,

σ_{j+1} : 第 $j+1$ 月之標準差

r_j : 第 $j+1$ 月與第 j 月之相關係數

1965年 Beard氏復進一步探討月流量之多階馬可夫鏈模式, 即 HEC 模式

$$\begin{aligned} X_{i,j} &= \beta_{1,j} X_{i-1,j} + \beta_{2,j} X_{i-2,j} + \dots + \beta_{j-1,j} X_{i-j+1,j} + \beta_{j,j} X_{i-j,j} \\ &\quad + \beta_{j+1,j} X_{i-j-1,j} + \dots + \beta_{n,j} X_{i-1,n} + \sqrt{1-R_{i,j}^2} \cdot Z_{i,j} \\ &= \sum_{\alpha=1}^{j-1} \beta_{\alpha,j} X_{i-\alpha,j} + \sum_{\alpha=j}^n \beta_{\alpha,j} X_{i-\alpha,\alpha} + \sqrt{1-R_{i,j}^2} \cdot Z_{i,j} \quad \dots \quad (3-6) \end{aligned}$$

式中 i : 月份

j : 水文站

$X_{i,j}$: 在 j 站 i 月之常態化或對數常態化後之月流量 (The standardized, normalized logarithm of the monthly flow)

$\beta_{\alpha,j}$: 標準變量之迴歸係數 (The regression coefficient of the normalized standard variate)

$R_{i,j}$: 複相關係數 (Multiple correlation coefficient)

$Z_{i,j}$: 亂數值 (Random normal standard deviate)

1967年 Beard氏再探二階馬可夫鏈模式推衍日流量, 並假設日流量之機率分佈為 Pearson Type III distribution, 模式為

$$Q_{i+2} = b_1 Q_{i+1} + b_2 Q_i + X_r \sqrt{1-r^2} \quad \dots \quad (3-7)$$

式中 Q_{i+2} , Q_{i+1} , Q_i 表連續三天之常態標準變量

X_r : 隨機標準化變量

b_1, b_2 為迴歸係數

r 為迴歸方程式之相關係數

而常態標準化變量計算步驟為

(一) 將各逕流量 Q 取對數 $Y = \log Q$, 設算各站 Y 之平均值 M 、標準差 S 及偏態係數 g 。

(二) 令 $K = \frac{Y-M}{S}$

(三) 假定 K 之頻率分佈曲線為 Pearson Type III, 運用 g 經由下式可將 K 常態化 (Normalized) 為

$$X = \frac{6}{g} \left[\left(\frac{g}{2} K + 1 \right)^{1/3} - 1 \right] + \frac{g}{6} \quad \dots \quad (3-8)$$

X 為標準常態變量

若利用迴歸分析方法可求出 b 及 r

倒置上述步驟可由 X 變換為流量 Q , 即

$$(1) K = \frac{2}{g} \left\{ \left[\frac{g}{6} \left(X - \frac{g}{6} \right) + 1 \right]^3 - 1 \right\} \quad \dots \quad (3-9)$$

$$(2) \log Q = Y = M + KS$$

$$(3) Q = \log^{-1} Q$$

Q 即為人工合成之資料。

1967年Matalas氏亦曾分析月流量，其假設流量具對數常態分佈 (Log-normal distribution)，首先將資料取對數

$Y = \log Q$ ，其模式如下

$$(Y_{i+1} - \mu_Y) = r(Y_i - \mu_Y) + t\sigma_Y(1 - r^2)^{1/2} \quad \dots \quad (3-10)$$

式中 Y_{i+1} ：第 $i+1$ 月之推衍對數常態流量

μ_Y ：各月之對數常態平均值

r ：第 $i+1$ 月與第 i 月之迴歸係數

σ_Y ：第 i 月之觀測值標準偏差

t ：亂數值

r_Y ：迴歸方程式之相關係數

1968~1969年Mandelbrot and Wallis 提出FGN模式，其全名為過濾二型近似零數高斯雜波模式(Filter Type II Approximation Fractional Gaussian Noise Model)

$$y_t = \left(H - \frac{1}{2}\right) \sum_{\mu=t-M}^{t-1} (t-\mu)^{H-\frac{3}{2}} \epsilon_\mu \quad (3-11)$$

式中 H ：Hurst 係數 $0.5 \leq H \leq 1$

M ：常數，擬似 Moving Average Model 之階次，即為記憶長度。

1971年Mejia式提出 Broken-line process Model

$$Q_t = \mu(Q) + \sigma(Q) \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} \sum_{j=1}^N W_j \beta_j(t) \quad \dots \quad (3-12)$$

式中： $\mu(Q)$ 為平均流量

$\sigma(Q)$ 為 $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_N$ 之標準偏差

W_j 為 Hurst 係數 H 之函數， $W_j = f(H)$ ，而 $\sum_{j=1}^N W_j^2 = 1$

$\beta_j(t) = \epsilon_j'(t) + [\epsilon_j'(i+1) - \epsilon_j'(i)(t - i a_j)] / a_j$

$i a_j \leq t \leq (i+1) a_j, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \infty$

設 g 為 $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_N$ 之偏態係數

則擬合 Gamma 分佈之 $g' = g[1 - r_1^3] / [1 - r_1^2]^{3/2}$

r_1 為一階自相關係數

$$\epsilon_j' = \frac{2}{g'} \left(1 + \frac{g'}{6} \epsilon_j - \frac{g'^2}{36} \right)^3 - \frac{2}{g'}$$

$$\epsilon_j \sim N(0, 1)$$

上述之 FGN 模式及 Broken-line Process 模式目前正在測試研究階段，且拭目以待。

3-5 以 Thomas and Fiering 模式作月流量合成時序之繁衍步驟：

已知 n 年 m 月 (12 月) 之水文記錄：

	$X_{1,1}$	$X_{1,2}$	$X_{1,3}$	\dots	$X_{1,12}$
	$X_{2,1}$	$X_{2,2}$	$X_{2,3}$	\dots	$X_{2,12}$
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
	$X_{n,1}$	$X_{n,2}$	$X_{n,3}$	\dots	$X_{n,12}$
平均值	\bar{X}_1	\bar{X}_2	\bar{X}_3	\bar{X}_j	\bar{X}_m
標準偏差	s_1	s_2	s_3	s_j	s_m

(一) 求出第 j 個月之月流量均數 $\bar{X}_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_{i,j}$

$$\text{變方: } s_j^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N X_{i,j}^2 - \frac{1}{N(N-1)} \left(\sum_{i=1}^N X_{i,j} \right)^2$$

(二) 求第 j 個月及臨前 $(j-1)$ 月流量之相關係數

$$r_{(j)} = \frac{\sum_{i=1}^N X_{i,j} X_{i,j-1} - N \bar{X}_j \bar{X}_{j-1}}{(N-1) s_j s_{j-1}}$$

(三) 求第 j 個月流量分佈之偏態係數

$$g_j = \frac{N^2 \sum_{i=1}^N X_{i,j}^3 - 3N \sum_{i=1}^N X_{i,j} \sum_{i=1}^N X_{i,j}^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^N X_{i,j} \right)^3}{N(N-1)(N-2) s_j^3}$$

(四) 求第 j 個月之隨機變量(Random-deviate)之偏度

$$g_{t,j} = \frac{g_j - r_{(j-1)}^3 g_{j-1}}{[1 - r_{(j)}^2]^{1.5}}$$

(五) 取隨機號碼 $t_{i,j} \sim N(0, 1)$

(六) 代入模式

$$X_{i,j} = \bar{X}_j + \frac{r_{(j)} s_j}{s_{j-1}} (X_{i,j-1} - \bar{X}_{j-1}) + t_{i,j} s_j \sqrt{1 - r_{(j)}^2}$$

3-6 利用 Thomas-Fiering 模式衍生資料之算例：

表 3-3 淡水河乾溝站 03-H18 1961~1975 年之資料計算表

月份	平均數 (cms)	標準偏差 (cms)	相關係數 $r_{(j)}$	迴歸係數 b_j
J	20.80	15.00	0.220	0.248
F	18.25	13.20	-0.068	-0.060
M	15.54	8.07	0.124	0.076
A	9.03	5.03	0.127	0.079
M	15.46	9.41	0.212	0.397
J	25.68	11.83	-0.036	-0.045
J	13.82	15.75	-0.217	-0.289
A	21.12	20.93	0.663	0.881
S	49.68	36.80	-0.560	-0.985
O	50.68	37.73	0.163	0.167
N	28.23	18.24	0.577	0.279
D	24.36	13.32	0.223	0.163

$$* b_j = \frac{r_j s_{j+1}}{s_j} \quad b_1 = \frac{r_1 s_2}{s_1} = 0.220 \times \frac{15.00}{13.32} = 0.248$$

$$\begin{aligned} \therefore X_J &= 20.80 + 0.248(X_D - 24.36) + 14.63Z \\ X_F &= 18.25 - 0.060(X_J - 20.80) + 13.17Z_2 \\ X_M &= 15.54 + 0.076(X_F - 18.25) + 8.01Z_3 \\ X_A &= 9.03 + 0.079(X_M - 15.54) + 4.99Z_4 \\ X_M &= 15.46 + 0.397(X_A - 9.03) + 9.20Z_5 \\ X_J &= 25.68 - 0.045(X_M - 15.46) + 11.80Z_6 \\ X_J &= 13.82 - 0.289(X_J - 25.68) + 15.38Z_7 \\ X_A &= 21.12 + 0.881(X_J - 13.82) + 15.67Z_8 \\ X_S &= 49.68 - 0.985(X_A - 21.12) + 30.49Z_9 \\ X_O &= 50.68 + 0.167(X_S - 49.68) + 37.23Z_{10} \\ X_N &= 28.23 + 0.279(X_O - 50.68) + 14.90Z_{11} \\ X_D &= 24.36 + 0.163(X_N - 28.23) + 12.99Z_{12} \end{aligned}$$

Z 為隨機常態變值 $Z \sim N(0, 1)$

於計算機處理時可藉二個副程式直接呼叫(call)代入模式,得1976年之預估值,茲隨機Run一次,並與實測值比較如表3-4。

表 3-4 淡水河乾溝站1976年預測值與實測值之比較表

	J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
預估值	12.87	8.10	16.11	13.26	10.19	20.57	27.08	18.85	58.16	56.98	17.19	8.32
實測值	13.00	10.36	13.84	12.10	17.57	20.45	17.95	22.20	35.86	12.45	27.27	8.72

利用電子計算機程式處理全省各河川之流量,流程圖如附錄(一),吾人得知本省集水區月流量變化甚大,尤其每年七、八、九月颱風侵襲時期呈現各類特異現象。

由本程式合成之100年流量資料 可供各地區水資源規劃之參考。

四 極端值理論之推演及應用 (14, 15, 18, 19, 20)

極端值分析乃指水文時列,取其最大值或最小值予以分析之極限分佈,以其分佈之特徵求水文時列之迴歸週期(Recurrence interval)或發生機率之大小。

極端值第一型分佈,又稱為Gumbel分佈。首由Gumbel氏於1941年將之用為洪水頻率之分析。第三型首由Weibull氏用以研究易碎物質之應力情況,1954年Gumbel氏利用此理論從事乾旱頻率之研究,茲分述如后。

4-1 極端值第一型分佈(Extreme-value Type I distribution)屬最大值,雙指數分佈函數

$$P(x) = e^{-e^{-\alpha(x-\beta)}} \quad \dots \quad \dots \quad (4-1)$$

$$J(x) = 1 - P(x) \quad \dots \quad \dots \quad (4-2)$$

式中 P 為小於或等於某水文量

J 為大於或等於某水文量,必發生者

$$\text{令} \quad y = \alpha(x - \beta) \quad \dots \quad \dots \quad (4-3)$$

y 為改化變量(Reduced variate) $-2 < y < 7$

$$P(x) = e^{-e^{-y}} \quad \dots \quad (4-4)$$

將(4-1)式分別取一次微分，二次微分得衆值之累積率密度 P(m)

$$P(m) = P(\beta) = e^{-1} = 0.368$$

$$\text{平均數 } \mu = \beta + \frac{0.5772}{\alpha} \quad \dots \quad (4-5)$$

$$\text{標準偏差 } \sigma = \frac{\pi}{\alpha \sqrt{6}} = \frac{1.281}{\alpha} \quad \dots \quad (4-6)$$

整理(4-5), (4-6)

$$\beta = \mu - \frac{0.5772}{\alpha} = \mu - 0.45008\sigma \quad \dots \quad (4-7)$$

$$\alpha = \frac{1.281}{\sigma} \quad \dots \quad (4-8)$$

故 $y = \alpha(x - \beta) \quad \dots \quad \dots$

$$x = \frac{1}{\alpha}y + \beta \quad \dots \quad \dots \quad (4-9)$$

應用時可由實測記錄計算極端值之 μ, σ 代入(4-7), (4-8)式，則可求出理論分佈

$$y = \alpha(x - \beta)$$

頻率分析時以 Gumbel 機率紙點繪之。

4-2 極端值第三型分佈(Extreme-value Type III distribution) 屬最小值約束指數分佈

$$P(x) = \exp\left[-\left(\frac{x-r}{\beta-r}\right)^{\alpha}\right] \quad \dots \quad (4-10)$$

其中 $x \geq r, \alpha > 0, \beta > r$

α 為一正數，且為無因次，一般應用上以 $\lambda = \frac{1}{\alpha}$ 代之

β 為特徵乾涸(Characteristic drought)

$$P(\beta) = e^{-1} = 0.368$$

$$T(\beta) = \frac{1}{1 - P(\beta)} = 1.582$$

r 為極小乾涸量(Minimum drought) 為不可能發生之水量。

$$P(r) = 1$$

$$T(r) = \infty$$

α, β, r 三參數均有待估算。

茲就 r 之特性分別予以討論。

(-) 假設 $r=0$ 時，(4-10)式為二參數(Two-parameter)之型式，呈線性變化，應用較便

$$P(x) = \exp\left[-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right] \quad \dots \quad (4-11)$$

令 C_v 為變異係數(Coefficient of variation)

$$C_v = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{1}{B(\lambda_1)\Gamma(1+\lambda_1)} \quad \dots \quad (4-12)$$

$$B(\lambda_1) = [\Gamma(1+2\lambda_1) - \Gamma^2(1+\lambda_1)]^{1/2} \quad \dots \quad (4-13)$$

$\Gamma(1+\lambda_1)$ 為 Gamma 函數值。

(4-12), (4-13) 式之關係如表 4-1 或圖 4-1。

由實測水文資料先計算均數 \bar{X} , 標準偏差 s , 並算出 C_v , 即可估得參數 λ_1 。

表 4-1: 當 $\gamma = 0$ 時由 C_v 估算 λ_1

參數 λ_1	\bar{X}/s	參數 λ_1	\bar{X}/s
0.01	78.5335	0.20	4.3658
0.02	39.5429	0.30	3.0243
0.03	26.5423	0.40	2.3370
0.04	20.0392	0.50	1.9131
0.05	16.1352	0.60	1.6207
0.06	13.5308	0.70	1.4079
0.07	11.6690	0.80	1.2422
0.08	10.2714	0.90	1.1094
0.09	9.1833	1.00	1.0000
0.10	8.3118		

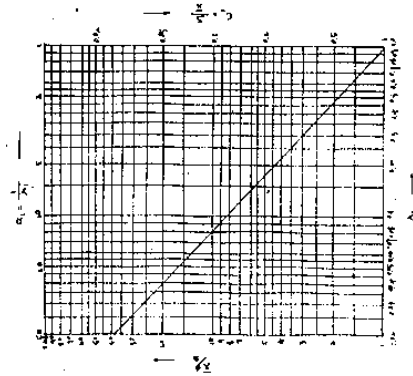


圖 4-1: 當 $\gamma = 0$ 時由 C_v 估算 λ_1 之圖解曲線

再由動差法 (Method of moment) 推得

$$\beta = \frac{\bar{X}}{\Gamma(1 + \lambda_1)} > \bar{X} \quad \dots \quad (4-14)$$

令 $y' = \left(\frac{X - \gamma}{\beta - \gamma}\right)^\lambda$ y' 亦為改化變量

$$-1 < y' < 2$$

$$\ln(X - \gamma) = \ln(\beta - \gamma) + \lambda y' \quad \dots \quad (4-15)$$

當 $\gamma = 0$ 時

$$\ln X = \ln \beta + \lambda_1 y'$$

故二參數乾涸流量頻率方程式為

$$\ln X = \ln \beta e^{\lambda_1 y'} \quad \dots \quad (4-16)$$

(二) 假設 $\gamma > 0$, (4-10) 式為三參數型式, 呈非線性變化, 與實際情形較為貼合。

設 X_1, X_2, \dots, X_N 為 N 年流量觀測值, 其中最小乾涸量為 X_1 , 平均數為 \bar{X} , 標準偏差 s 。

定義一 試驗函數 (Test function) τ

$$\tau(\lambda, N) = t_N = \frac{\bar{X} - X_1}{s} \quad \dots \quad (4-17)$$

由動差法得知

$$\tau(\lambda, N) = \Gamma(1 + \lambda) B(\lambda) (1 - N^{-\lambda}) \quad \dots \quad (4-18)$$

$$\text{其中 } B(\lambda) = [\Gamma(1 + 2\lambda) - \Gamma^2(1 + \lambda)]^{-1/2} \quad \dots \quad (4-19)$$

式 (4-18), (4-19) 之關係如圖 4-2。

由 $\tau(\lambda, N)$, N 查圖可估得 λ 值, 則估計極小乾涸量 $\hat{\gamma}$ 為

$$\hat{\gamma} = X_1 - \frac{\bar{X} - X_1}{N^2 - 1} < X_1 \quad \dots \quad (4-20)$$

$$\text{令校正因子 } C = \frac{1}{N^2 - 1}$$

$$\text{則 } \hat{\gamma} = X_1 - C(\bar{X} - X_1) \quad \dots \quad (4-21)$$

而 C, N, λ 之關係如圖 4-3。

$$\hat{\beta} = \frac{\bar{X} - \hat{\gamma}}{\Gamma(1 + \lambda)} + \hat{\gamma} \quad \dots \quad (4-22)$$

$\hat{\beta}, \hat{\gamma}, \lambda$ 求出後代入(4-15)式

$$\ln(X - \hat{\gamma}) = \ln(\hat{\beta} - \hat{\gamma}) + \lambda y'$$

三參數乾涸流量頻率方程式為

$$X = \hat{\gamma} + (\hat{\beta} - \hat{\gamma}) e^{\lambda y'} \quad \dots \quad (4-23)$$

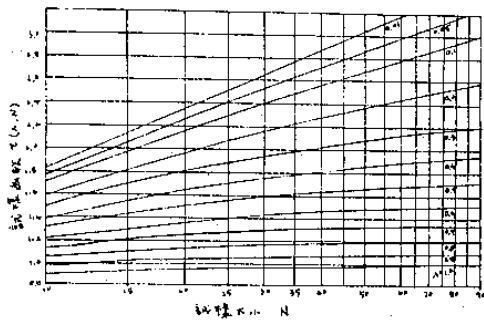


圖 4-2：由已知樣本大小 N 及參數 λ 求得之試驗函數 $\sigma(\lambda, N)$

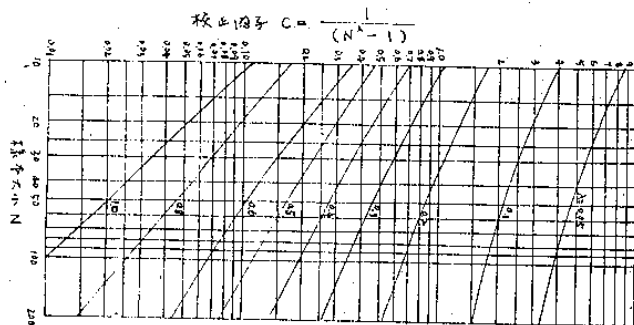


圖 4-3：與 λ, N 成函數關係之校正因子 C

4-3 分析與應用

本研究以極端值第一型分佈分析台灣集水區各雨量站測得之最大連續不降雨日數，並分別求取迴歸週期為 2 年，5 年，10 年，25 年，50 年之最大連續不降雨日數，如表 4-2。將之點繪於圖上，繪等乾旱線 (isodrought) 如圖 4-4, 4-5, 4-6, 4-7, 4-8。以極端值第三型分佈分析台灣 19 條主要河川及 4 條次要河川之乾涸流量，並分別求取迴歸週期為 2 年、5 年、10 年、25 年、50 年、100 年之枯水流量及比流量如表 4-3, 表 4-4, 表 4-5，其計算表見附錄(二)、(三)、(四)。

表 4-2：由極端值第一型分佈分析台灣集水區各雨量站之最大連續不降雨日數統計表

流域	站名	代號	D ₂	D ₅	D ₁₀	D ₂₅	D ₅₀
淡水河	復興	0317	24	37	46	57	66
	福山	0337	14	17	20	23	26
	台北	0365	16	21	24	28	31
	火燒寮	0369	17	22	26	31	34
頭前溪	大閣南	1303	28	39	47	57	64
	竹東	1311	29	37	42	49	54
	新竹	1316	29	39	45	53	59
後龍溪	大湖(1)	1903	40	56	68	82	92
	後龍	1908	41	59	71	85	96
大安溪	卓蘭	2309	46	64	75	90	100
	大安(1)	2310	38	47	54	62	67
	日南	2313	53	70	82	97	108
大甲溪	青山	2507	30	40	47	55	61
	八仙山	2512	26	37	45	54	61
	大南(1)	2522	45	64	77	92	104
	月眉(1)	2527	50	66	77	91	102
	月眉(2)	2528	43	57	67	80	89
烏溪	埔里(1)	2712	34	52	63	77	88
	名間(2)	2729	39	56	67	82	92
	台中(1)	2742	41	53	62	73	81
	豐原(1)	2748	45	60	70	83	92
	大肚(1)	2757	57	75	87	103	114
濁水溪	廬山	2910	32	45	53	63	71
	武界	2919	26	34	39	45	50
	集集	2945	43	62	75	91	103
	阿里山(2)	2955	22	28	32	37	41
	阿里山(1)	2956	40	61	76	94	107
北港溪	虎尾(1)	3328	41	54	62	72	80
	北港(1)	3356	47	62	72	85	94
朴子溪	竹崎(1)	3503	44	63	76	92	104
八掌溪	南靖	3717	46	61	71	83	92
	嘉義(1)	3713	44	56	65	75	82
急水溪	新營(1)	3920	52	69	79	93	103
曾文溪	烏山頭	4128	50	67	79	94	105
	曾文	4132	61	83	97	115	128
鹽水溪	台南	4322	45	59	69	81	91
二仁溪	車路墘	4515	54	78	93	113	127
高雄川	高雄(1)	4905	50	67	79	93	104
	月眉(1)	5138	58	87	106	131	149
	旗山(1)	5148	59	83	98	118	132
	旗尾(3)	5147	51	71	84	101	114
屏東(1)	5162	45	59	67	79	87	
東港溪	東港	5330	58	80	94	113	127
保力溪	恆春	6501	28	37	43	50	56
蘭陽溪	天埤	1018	15	20	22	26	29
	宜蘭(2)	1026	17	22	25	29	33
立霧溪	溪畔	2203	27	43	53	66	75
三棧溪美崙溪	花蓮	24-2602	17	21	24	27	30
花蓮溪	萬里橋	3009	17	22	26	30	33
秀姑巒溪	池上(1)	3402	35	50	59	71	79
卑南溪	霧鹿	4002	28	37	43	50	56
	台東(1)	4021	22	27	31	36	39
大南溪	大南(1)	4401	25	34	40	48	54
大武-港口溪	大武(2)	54-5602	15	19	22	25	28

圖 4-4 台灣集水區各雨量站之最大連續不降雨日數~等乾旱線圖
 (極端值第一型分佈法~迴歸周期2年)

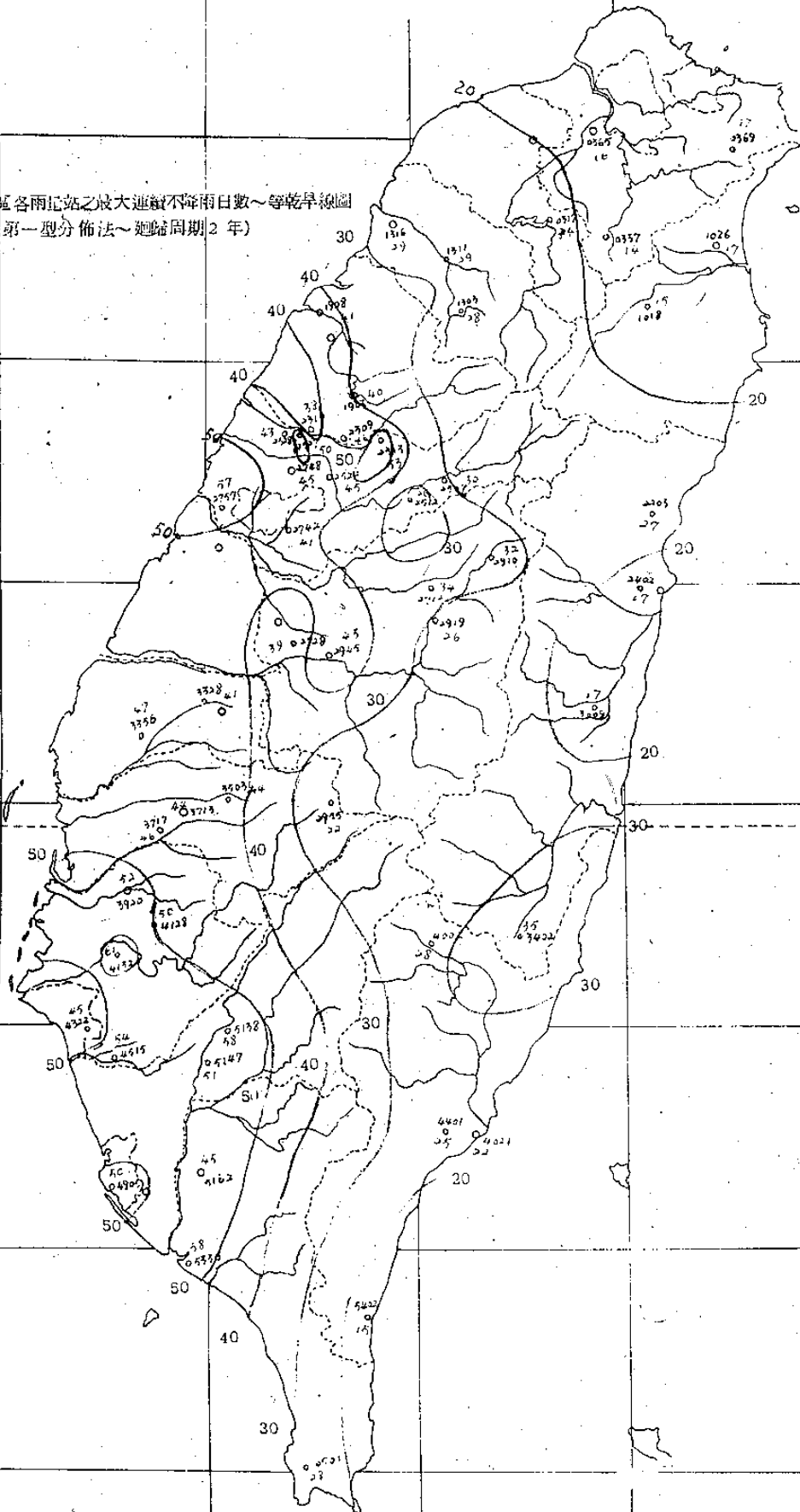


圖4-5 台灣集水區各雨量站之最大連續不降雨日數~等乾旱線圖
 (極端值第一型分佈法~迴歸周期5年)

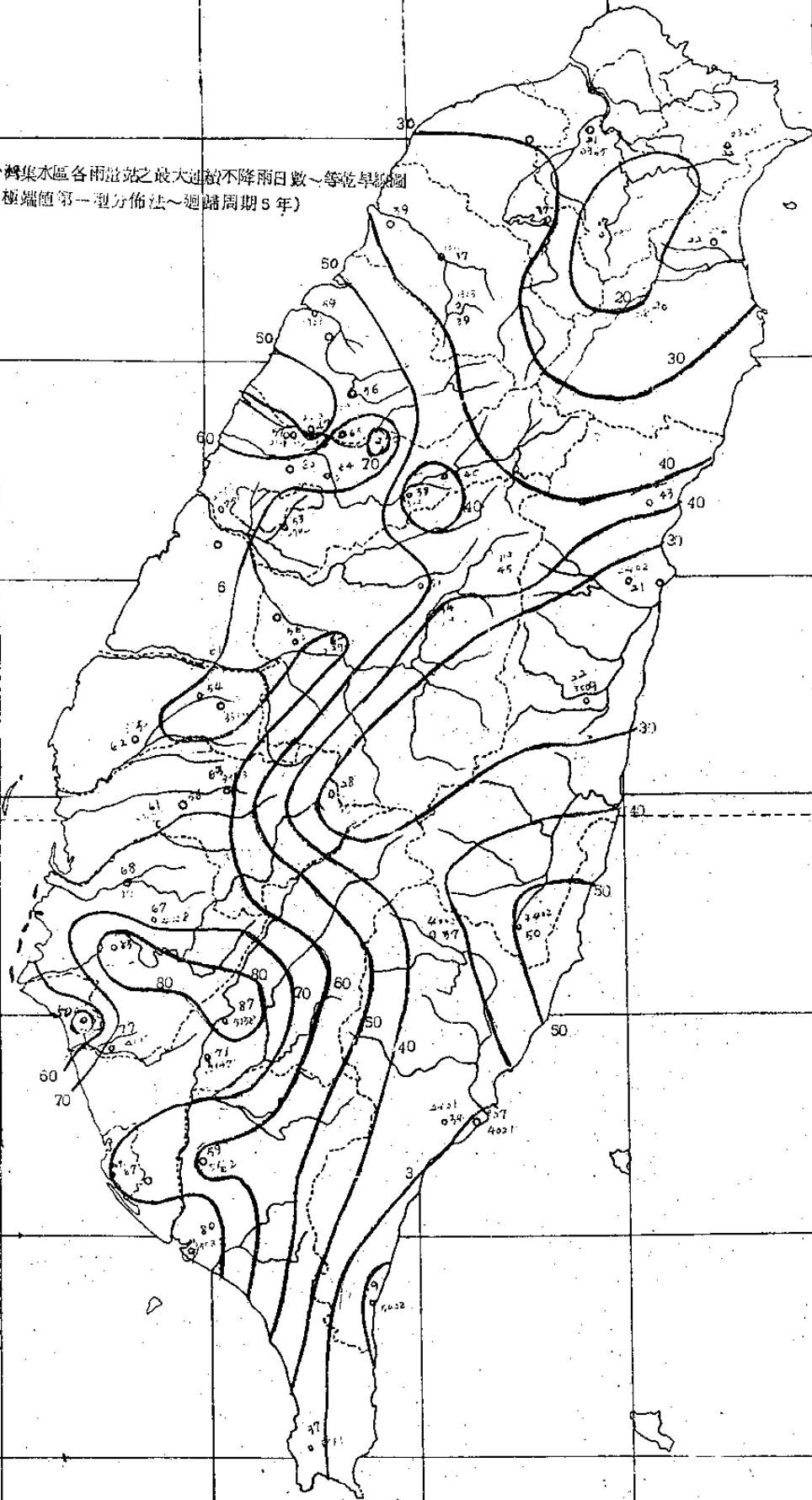


圖 4-8 台灣集水區各雨量站之最大連續不降雨日數~等乾旱線圖
 (極端值第一型分佈法~迴歸周期 10 年)

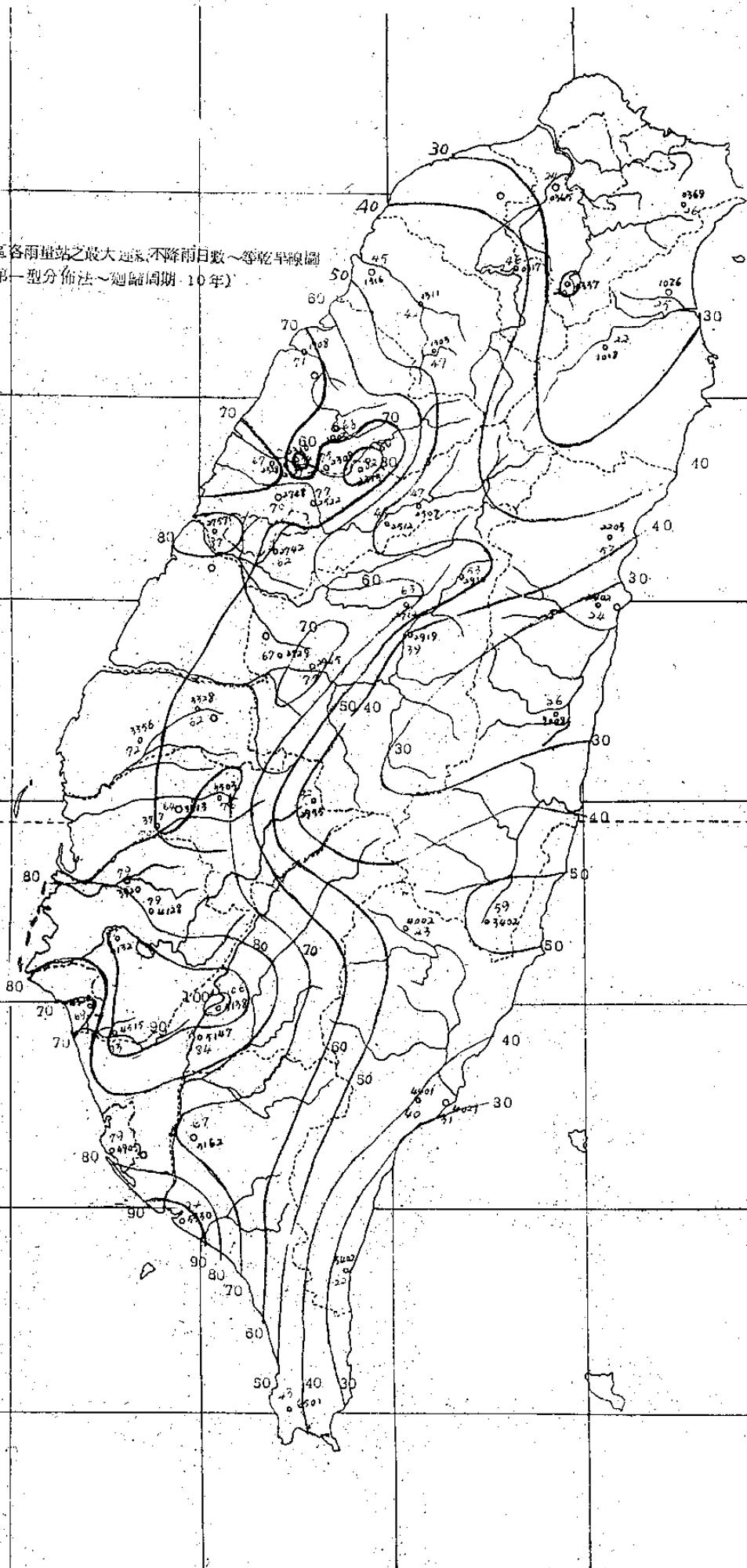


圖 4-7 台灣集水區各雨量站之最大連續不降雨日數~等乾旱綫圖
 (德國直第一型分佈法~迴歸期 25 年)

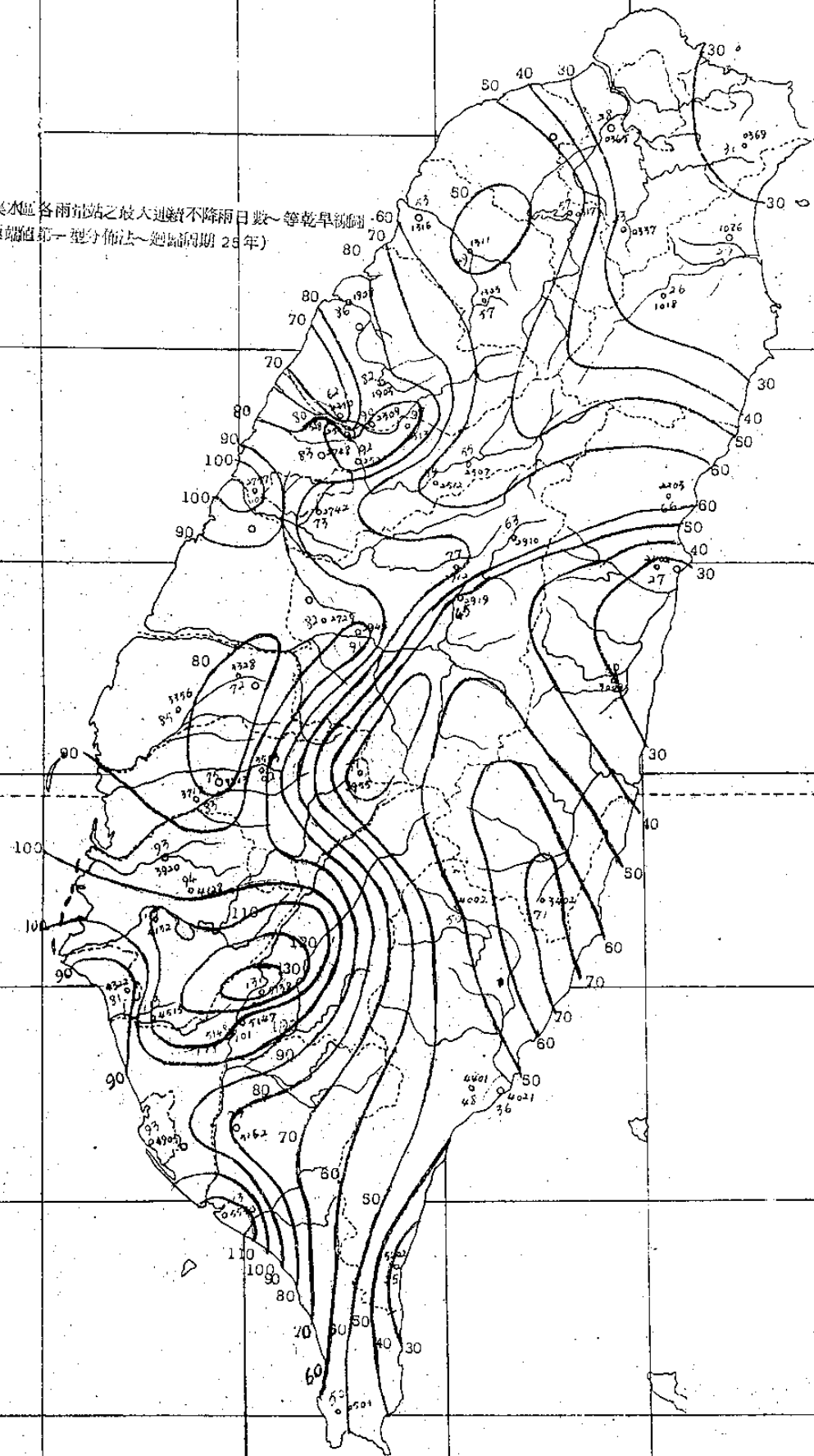


圖 4-8 台灣集水區各雨量站之最大連續不降雨日數~等乾旱線圖
 (極端值第一型分佈法~迴歸周期 50 年)

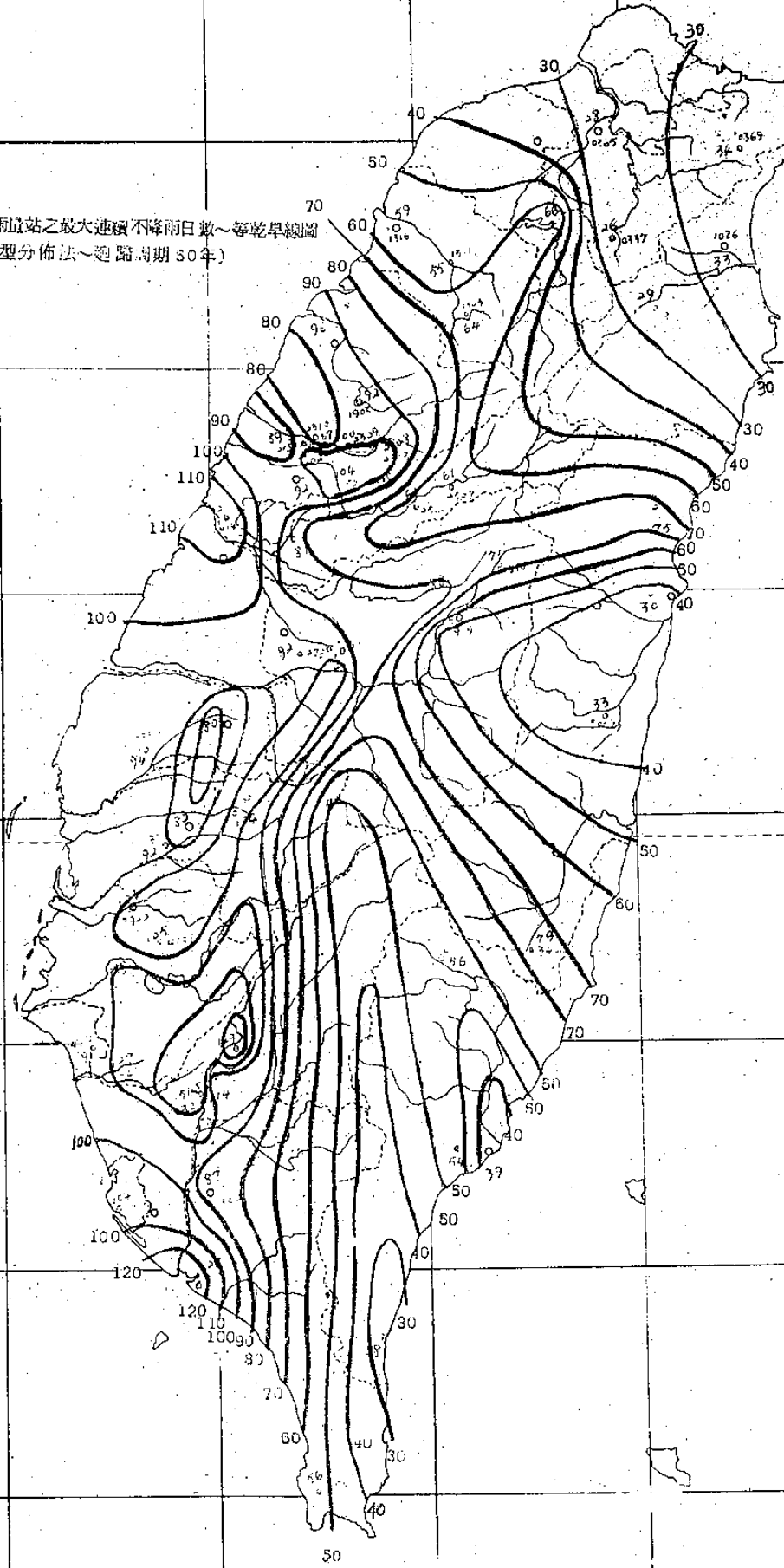


表 4-3: 台灣集水區各河川乾涸流量頻率表
(日流量)

流域	測站	流域面積A km ²	D ₂ (cms)	Q ₂	D ₅ (cms)	Q ₅	D ₁₀ (cms)	Q ₁₀	D ₂₅ (cms)	Q ₂₅	D ₅₀ (cms)	Q ₅₀
淡水河	玉峰	335.29	3.02	0.0090	2.30	0.0069	1.92	0.0057	1.53	0.0046	1.29	0.0038
"	稜角	107.79	1.78	0.0165	1.42	0.0132	1.22	0.0113	1.01	0.0094	0.88	0.0082
"	石門	754.28	7.58	0.0101	5.11	0.0068	3.93	0.0052	2.82	0.0037	2.20	0.0027
"	福山	160.40	4.23	0.0264	3.26	0.0203	2.74	0.0171	2.20	0.0137	1.88	0.0117
"	新龜山	315.02	7.91	0.0251	6.53	0.0207	5.74	0.0182	4.89	0.0155	4.34	0.0138
"	乾溝	258.00	1.70	0.0066	1.01	0.0039	0.71	0.0028	0.46	0.0018	0.33	0.0013
"	小粗坑	694.14	11.55	0.1801	8.91	0.0128	7.50	0.0108	6.03	0.0087	5.13	0.0074
"	三光	391.80	3.74	0.0095	3.08	0.0079	2.72	0.0069	2.31	0.0059	2.05	0.0052
"	鳶山(3)	850.56	1.65	0.0019	1.10	0.0013	0.84	0.0010	0.59	0.0007	0.46	0.0005
"	霞雲	622.80	6.79	0.0109	5.29	0.0085	4.49	0.0072	3.64	0.0058	3.12	0.0050
蘭陽溪	蘭陽大橋	820.69	9.03	0.0110	5.25	0.0064	3.66	0.0045	2.32	0.0028	1.66	0.0020
頭前溪	二重埔	485.48	0.92	0.0019	0.38	0.0008	0.21	0.0004	0.10	0.0002	0.06	0.0001
中港溪	竹南	324.35	0.23	0.0007	0.13	0.0004	0.09	0.0003	0.06	0.0002	0.04	0.0001
後龍溪	打鹿坑	247.28	0.85	0.0034	0.57	0.0023	0.44	0.0018	0.32	0.0013	0.25	0.0010
大安溪	七塊厝	627.55	1.06	0.0017	0.29	0.0005	0.12	0.0002	0.04	0.00006	0.02	0.00003
大甲溪	天冷	953.80	5.76	0.0060	4.20	0.0044	3.40	0.0036	2.61	0.0028	2.14	0.0022
烏溪	柑子林	954.24	8.08	0.0085	6.65	0.0070	5.87	0.0062	4.99	0.0052	4.43	0.0046
濁水溪	集集	2304.20	26.21	0.0114	20.21	0.0088	17.01	0.0074	13.67	0.0059	11.64	0.0051
"	櫻社	188.00	2.51	0.0134	2.12	0.0112	1.89	0.0101	1.64	0.0088	1.48	0.0079
花蓮溪	萬里橋	232.32	4.52	0.0195	3.52	0.0152	2.99	0.0129	2.42	0.0104	2.08	0.0090
"	水簾	149.80	6.82	0.0455	5.63	0.0376	4.95	0.0330	4.21	0.0281	3.74	0.0250
"	光復	136.36	2.91	0.0213	1.85	0.0136	1.37	0.0101	0.94	0.0069	0.71	0.0052
北港溪	北港(2)	597.46	0.04	0.0001	0.01	0.00002	0	0	0	0	0	0
秀姑巒溪	紅葉	33.00	0.56	0.0070	0.38	0.0115	0.30	0.0091	0.22	0.0067	0.17	0.0052
"	富源	83.12	3.19	0.0384	2.12	0.0255	1.62	0.0195	1.15	0.0138	0.89	0.0137
"	富源清點	635.50	6.02	0.0095	4.01	0.0063	3.06	0.0048	2.17	0.0034	1.69	0.0027
"	合流美奇	1670.00	26.51	0.0159	22.89	0.0137	20.76	0.0124	18.35	0.0110	16.76	0.0100
朴子溪	朴子(2)	262.80	0.01	0.00004	0	0	0	0	0	0	0	0
八掌溪	義竹	441.02	0.03	0.00007	0	0	0	0	0	0	0	0
急水溪	新營橋	226.66	0.06	0.00026	0.02	0.0008	0.01	0.0004	0	0	0	0
卑南溪	新武呂	641.88	2.29	0.0036	1.35	0.0021	0.95	0.0015	0.61	0.0010	0.44	0.0007
"	延平	476.16	5.88	0.0124	4.67	0.0099	4.04	0.0085	3.34	0.0070	2.90	0.0061
"	台東大橋	1584.29	6.17	0.0039	2.80	0.0018	1.66	0.0011	0.85	0.0005	0.52	0.0003
"	霧鹿	276.90	3.01	0.0109	2.01	0.0073	1.53	0.0055	1.09	0.0039	0.85	0.0031
曾文溪	照興(3)	496.00	1.44	0.0029	0.83	0.0017	0.57	0.0012	0.36	0.0007	0.26	0.0005
"	西港	1157.46	0.02	0.00002	0	0	0	0	0	0	0	0
鹽水溪	關廟	38.05	0.12	0.0032	0.08	0.0021	0.06	0.0016	0.05	0.0013	0.03	0.0008
利嘉溪	利嘉(2)	148.62	0.19	0.0013	0.06	0.0004	0.03	0.0002	0.01	0.0001	0	0
二仁溪	崗山頭	139.30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
知本溪	知本(3)	165.96	0.66	0.0040	0.37	0.0022	0.26	0.0016	0.16	0.0010	0.11	0.0006
高屏溪	小林(1)	384.70	1.80	0.0051	1.08	0.0031	0.77	0.0022	0.51	0.0014	0.37	0.0010
"	月眉	539.52	0.50	0.0009	0.13	0.0003	0.09	0.0002	0.04	0.00007	0.02	0.00004
"	九曲堂(2)	3075.66	12.97	0.0043	6.51	0.0021	4.12	0.0013	2.31	0.0008	1.51	0.0005
"	荖濃	812.03	8.74	0.0108	5.82	0.0072	4.44	0.0055	3.15	0.0039	2.45	0.0030
林邊溪	新埤	309.86	0.09	0.0003	0.05	0.00016	0.04	0.00013	0.02	0.00007	0.02	0.00003

註: $Q_s = D_s / A$

表 4-4: 台灣集水區各河川乾涸流量頻率表

(旬流量)

流域	測站	流域面積A km ²	D ₂ (cms)	$Q_{s2} = \frac{D_2}{A}$	D ₅ (cms)	$Q_{s5} = \frac{D_5}{A}$	D ₁₀ (cms)	$Q_{s10} = \frac{D_{10}}{A}$	D ₂₅ (cms)	$Q_{s25} = \frac{D_{25}}{A}$	D ₅₀ (cms)	$Q_{s50} = \frac{D_{50}}{A}$
淡水河	玉降	335.29	36.71	0.1035	28.31	0.0844	23.82	0.0710	19.15	0.0571	16.30	0.0486
"	稜角	107.79	20.15	0.1869	15.19	0.1409	12.59	0.1168	9.93	0.0921	8.34	0.0774
"	石門	754.28	91.69	0.1216	63.15	0.0837	49.31	0.0654	36.04	0.0478	28.60	0.0379
"	福山	160.40	51.92	0.3237	39.59	0.2468	33.07	0.2062	26.32	0.1641	22.25	0.1387
"	新龜山	315.02	97.19	0.3085	75.80	0.2406	64.27	0.2040	52.15	0.1655	44.70	0.1419
"	乾溝	258.00	27.34	0.1060	16.26	0.0630	11.51	0.0446	7.44	0.0288	5.39	0.0209
"	小粗坑	694.14	156.21	0.2250	121.83	0.1755	103.30	0.1489	83.82	0.1208	71.85	0.1035
"	三光	391.80	40.67	0.1038	32.44	0.0828	27.92	0.0713	23.09	0.0589	20.07	0.0512
"	鳶山(3)	850.56	27.22	0.0320	18.75	0.0220	14.64	0.0172	10.70	0.0126	8.49	0.0100
"	震雲	622.80	73.31	0.1177	57.18	0.0918	48.48	0.0778	39.34	0.0632	33.72	0.0541
蘭陽溪	蘭陽大橋	820.69	134.06	0.1634	72.72	0.0886	51.50	0.0628	33.27	0.0405	24.11	0.0294
頭前溪	二重埔	485.48	14.60	0.0301	7.24	0.0149	4.55	0.0094	2.52	0.0052	1.64	0.0034
中港溪	竹南	324.35	3.55	0.0109	2.23	0.0069	1.64	0.0051	1.11	0.0034	0.83	0.0026
後龍溪	打鹿坑	247.28	10.00	0.0404	6.73	0.0272	4.18	0.0209	3.71	0.0150	2.91	0.0118
大安溪	七塊厝	627.55	14.38	0.0229	4.15	0.0066	1.82	0.0029	0.64	0.0010	0.30	0.0005
大甲溪	天冷	953.80	94.03	0.0986	66.14	0.0693	54.83	0.0575	43.24	0.0453	36.30	0.0381
烏溪	柑子林	954.24	88.97	0.0932	70.97	0.0744	61.08	0.0640	50.92	0.0529	43.92	0.0460
濁水溪	集集	2304.20	328.04	0.1424	258.75	0.1126	221.04	0.0959	181.06	0.0786	156.31	0.0678
"	櫻社	188.00	28.68	0.1526	22.88	0.1217	19.69	0.1047	16.28	0.0866	14.16	0.0753
花蓮溪	萬里橋	232.32	52.24	0.2247	43.11	0.1856	37.95	0.1634	32.29	0.1390	28.67	0.1234
"	水簾	149.80	78.94	0.5270	62.97	0.4204	54.20	0.3618	44.82	0.2992	38.97	0.2602
"	光復	136.36	34.39	0.2522	21.87	0.1604	16.21	0.1189	11.09	0.0813	8.38	0.0615

表 4-4: 台灣集水區各河川乾涸流量頻率表 (續)
(旬流量)

流域	測站	流域面積A km ²	D ₂ (cms)	Q _{s2}	D ₅ (cms)	Q _{s5}	D ₁₀ (cms)	Q _{s10}	D ₂₅ (cms)	Q _{s25}	D ₅₀ (cms)	Q _{s50}
北港溪	北港(2)	597.46	2.43	0.0041	0.79	0.0013	0.37	0.0006	0.14	0.0002	0.07	0.0001
秀姑巒溪	紅葉	33.00	6.90	0.2091	4.70	0.1424	3.64	0.1103	2.63	0.0797	2.08	0.0630
"	富源	83.12	35.58	0.4281	24.23	0.2915	18.78	0.2259	13.59	0.1635	10.71	0.1288
"	合流	655.50	65.38	0.1029	47.65	0.0750	38.62	0.0608	29.60	0.0466	24.33	0.0383
"	奇美	1670.00	281.41	0.1685	232.23	0.1391	204.43	0.1224	173.94	0.1042	154.43	0.0925
朴子溪	朴子(2)	262.80	0.25	0.0010	0.05	0.0002	0.02	0.00008	0	0	0	0
八掌溪	義竹	441.02	0.43	0.0010	0.04	0.0001	0.01	0	0	0	0	0
急水溪	新營橋	226.66	2.33	0.0103	1.09	0.0048	0.66	0.0029	0.35	0.0015	0.22	0.0010
卑南溪	新武呂	641.88	27.11	0.0422	15.94	0.0248	11.20	0.0175	7.17	0.0112	5.16	0.0080
"	延平	476.16	65.75	0.1381	52.45	0.1102	45.14	0.0948	37.33	0.0784	32.46	0.0682
"	台東大橋	1584.29	73.52	0.0464	31.50	0.0199	17.95	0.0113	8.80	0.0056	5.21	0.0033
"	霧鹿	276.90	32.20	0.1163	21.19	0.0765	16.06	0.0580	11.30	0.0408	8.72	0.0315
曾文溪	照興(3)	496.00	16.51	0.0333	9.71	0.0196	6.83	0.0138	4.37	0.0088	3.14	0.0063
"	西港	1157.46	1.16	0.0010	0.30	0.0003	0.12	0.0001	0.04	0	0.02	0
鹽水溪	蘭廟	38.05	1.73	0.0455	1.19	0.0313	0.93	0.0244	0.68	0.0179	0.54	0.0142
利嘉溪	利嘉(2)	148.62	3.90	0.0262	1.65	0.0111	0.94	0.0063	0.45	0.0030	0.27	0.0018
二仁溪	崗山頭	139.30	0.09	0.0006	0.01	0.0001	0	0	0	0	0	0
知本溪	知本(3)	165.96	8.81	0.0531	5.30	0.0319	3.78	0.0228	2.47	0.0149	1.80	0.0108
高屏溪	小林(1)	354.70	19.28	0.0544	11.86	0.0334	8.59	0.0242	5.71	0.0161	4.22	0.0119
"	月眉	539.52	7.10	0.0132	2.69	0.0050	1.41	0.0026	0.62	0.0011	0.35	0.0006
"	九曲堂(2)	3075.66	158.41	0.0515	92.09	0.0299	64.25	0.0209	40.72	0.0132	29.10	0.0095
"	老濃	812.03	98.00	0.1207	66.74	0.0822	51.72	0.0637	37.44	0.0461	29.51	0.0363
林邊溪	新埤	309.86	1.07	0.0035	0.69	0.0022	0.52	0.0017	0.36	0.0012	0.27	0.0009

註: Q_s = D / A

表 4-5: 台灣集水區各河川乾涸流量頻率分析表
(月流量)

流域	測站	流域面積 km ²	D ₂ (cms)	Q _{2.5}	D ₅ (cms)	Q _{5.5}	D ₁₀ (cms)	Q ₁₀	D ₂₅ (cms)	Q ₂₅	D ₅₀ (cms)	Q ₅₀	D ₁₀₀ (cms)	Q ₁₀₀
淡水河	玉峰	335.29	131.86	0.3933	99.41	0.2965	82.41	0.2458	64.99	0.1938	54.56	0.1607	45.80	0.1366
"	稜角	107.79	72.38	0.6715	49.85	0.4625	38.92	0.3611	28.45	0.2639	22.58	0.2095	17.92	0.1662
"	石門	754.28	360.12	0.4774	271.43	0.3599	225.08	0.2984	177.49	0.2353	149.00	0.1975	125.08	0.1658
"	福山	160.40	192.12	1.1978	106.75	0.6855	72.28	0.4506	44.10	0.2749	30.65	0.1911	21.30	0.1328
"	新龜山	315.02	405.03	1.2857	275.83	0.8756	213.74	0.6785	154.74	0.4912	121.97	0.3872	96.14	0.3052
"	乾溝	258.00	162.56	0.6301	92.39	0.3581	63.50	0.2461	39.49	0.1531	27.83	0.1079	19.61	0.0760
"	小粗坑	694.14	729.75	1.0513	531.82	0.7662	431.09	0.6210	330.40	0.4760	271.59	0.3913	223.25	0.3216
"	三光	391.80	148.60	0.3793	122.63	0.3130	107.95	0.2755	91.85	0.2344	81.55	0.2081	72.40	0.1848
"	鳶山(3)	850.56	130.14	0.1530	84.71	0.0996	63.70	0.0749	44.40	0.0522	34.03	0.0400	26.08	0.0307
"	霞雲	622.90	260.32	0.4180	203.02	0.3260	172.14	0.2764	139.68	0.2243	119.74	0.1923	102.65	0.1648
蘭陽溪	蘭陽大橋	820.69	510.00	0.6214	310.20	0.3780	223.00	0.2717	146.82	0.1789	107.90	0.1315	79.30	0.0966
頭前溪	二重埔	485.48	62.23	0.1282	29.32	0.0608	17.99	0.0371	9.61	0.0198	6.06	0.0125	3.82	0.0079
中港溪	竹南	324.35	21.36	0.0659	11.74	0.0362	7.89	0.0243	4.77	0.0147	3.29	0.0101	2.27	0.0070
後龍溪	打鹿坑	247.28	39.13	0.1582	24.62	0.0996	18.10	0.0732	12.26	0.0496	9.20	0.0372	6.91	0.0279
大安溪	七塊厝	627.55	66.51	0.1060	22.73	0.0362	11.15	0.0178	4.52	0.0072	2.33	0.0036	1.20	0.0019
大甲溪	天冷	953.80	302.66	0.3173	201.50	0.2113	153.82	0.1613	109.27	0.1146	84.93	0.0890	66.00	0.0692
烏溪	柑子林	954.24	317.68	0.3329	253.42	0.2656	218.12	0.2286	180.38	0.1890	156.81	0.1643	136.33	0.1429
濁水溪	集集	2304.20	1158.81	0.5029	967.14	0.4197	857.78	0.3723	736.82	0.3198	658.75	0.2859	588.95	0.2556
"	櫻社	188.00	102.88	0.5472	79.33	0.4220	66.76	0.3551	53.66	0.2854	45.68	0.2430	38.89	0.2069
花蓮溪	萬里橋	232.32	179.41	0.7723	144.75	0.6231	125.52	0.5403	104.79	0.4511	91.74	0.3949	80.32	0.3457
"	水簾	149.80	270.92	1.8085	218.57	1.4591	189.54	1.2653	158.24	1.0563	138.53	0.9248	121.28	0.9096
"	光復	136.36	121.86	0.8937	79.32	0.5817	59.65	0.4374	41.58	0.3049	31.86	0.2336	24.42	0.1791

註 Q_s = D / A

表 4-5: 台灣集水區各河川乾涸流量頻率分析表 (續)
(月流量)

流域	測站	流域面積 k m ²	D ₂ (cms)	Q ₂	D ₅ (cms)	Q ₅	D ₁₀ (cms)	Q ₁₀	D ₂₅ (cms)	Q ₂₅	D ₅₀ (cms)	Q ₅₀	D ₁₀₀ (cms)	Q ₁₀₀
北港溪	北港(2)	597.46	22.40	0.0375	10.82	0.0181	5.47	0.0092	2.30	0.0038	1.22	0.0020	0.64	0.0011
秀姑巒溪	紅葉	33.00	26.93	0.8179	16.60	0.5030	12.02	0.3642	7.99	0.2421	5.92	0.1794	4.38	0.1327
"	富源	83.12	124.68	1.5000	88.83	1.0687	70.94	0.8535	53.35	0.6418	43.24	0.5202	35.05	0.4217
"	卓流	635.50	249.84	0.3931	180.03	0.2833	144.84	0.2279	109.96	0.1730	89.76	0.1412	73.27	0.1153
"	奇美	1670.00	1000.13	0.5989	825.33	0.4942	726.53	0.4350	618.18	0.3702	548.83	0.3286	487.25	0.2918
朴子溪	朴子(2)	262.80	1.89	0.0072	0.40	0.0015	0.14	0.0005	0.04	0.0002	0.02	0.0001	0.01	0
八掌溪	義竹	441.02	2.23	0.0051	0.23	0.0005	0.05	0.0001	-0.01	0	0	0	0	0
急水溪	新營橋	226.66	9.86	0.0435	4.47	0.0197	2.64	0.0116	1.36	0.0060	0.83	0.0037	0.51	0.0023
卑南溪	新武呂	641.88	107.94	0.1682	64.91	0.1011	46.32	0.0722	30.21	0.0471	22.04	0.0343	16.09	0.0251
"	延平	476.16	212.44	0.4462	156.58	0.3238	127.88	0.2686	98.95	0.2078	81.91	0.1720	67.80	0.1424
"	台東大橋	1584.29	275.36	0.1738	120.69	0.0762	69.80	0.0441	34.89	0.0220	20.93	0.0132	12.56	0.0079
曾文溪	霧鹿	276.90	121.49	0.4388	75.59	0.2730	55.16	0.1992	37.01	0.1337	27.59	0.0996	20.56	0.0743
"	照興(3)	496.00	58.26	0.1175	34.65	0.0699	24.54	0.0495	15.85	0.0320	11.49	0.0232	8.33	0.0168
"	西港	1157.46	6.84	0.0059	2.21	0.0019	1.04	0.0009	0.40	0.0003	0.20	0.0002	0.10	0.0001
鹽水溪	關廟	38.05	6.16	0.1619	4.54	0.1193	3.71	0.0975	2.87	0.0754	2.38	0.0625	0.97	0.0518
利嘉溪	利嘉(2)	143.62	20.41	0.1373	11.60	0.0781	7.97	0.0536	4.96	0.0334	3.49	0.0235	2.46	0.0166
二仁溪	崗山頭	139.30	1.03	0.0074	0.14	0.0010	0.04	0.0003	0.01	0.0001	0	0	0	0
知本溪	知本(3)	165.96	35.11	0.2116	19.95	0.1202	13.71	0.0826	8.53	0.0514	6.01	0.0362	4.23	0.0255
高屏溪	小林(1)	354.70	65.57	0.1349	41.26	0.1163	30.34	0.0855	20.55	0.0579	15.42	0.0435	11.57	0.0326
"	月眉	539.62	28.22	0.0523	11.30	0.0209	6.15	0.0114	2.85	0.0053	1.62	0.0030	0.92	0.0017
"	九曲堂(2)	3075.66	532.61	0.1732	320.31	0.1041	228.56	0.0743	149.05	0.0485	108.78	0.0354	79.38	0.0258
"	老濃	812.30	313.55	0.3861	213.52	0.2629	165.46	0.2038	119.79	0.1475	94.42	0.1163	74.42	0.0916
林邊溪	新埤	309.86	4.01	0.0129	2.49	0.0080	1.82	0.0059	1.22	0.0039	0.91	0.0029	0.68	0.0022

註: Q_s = D / A

5-1 概述

ARIMA 模式，或稱 Box-Jenkins 模式，其基本觀念在於以一物理量之過去觀測值 (Z_t) 可由一線性隨機模式代表之，並經模式之鑑定 (Identification)，模式之參數估計 (Estimation)，模式之診斷 (Diagnostic checking) 後，可藉此模式由有限 p 個過去觀測值 (AR(p) 模式) 之權重和，再加上有限 q 個過去之擾動值 (MA(q) 模式) 之權重和，預測該物理量之未來數值。

p 階自迴歸模式，簡寫 AR(p) 模式，以下式表之

$$W_t = \phi_1 W_{t-1} + \phi_2 W_{t-2} + \dots + \phi_p W_{t-p} + a_t \quad \dots \quad (5-1)$$

其中 $W_t = Z_t - \mu$ ，

μ 為觀測物理量平均量， $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ 為 AR(p) 模式之 p 項參數。 $\{a_t\}$ 為一擾動 (shocks) 或稱之為白噪音 (White noise)，統計上一般均假定其為常態分佈，期望值為 0，變方 (Variance) 為 σ_a^2 。

另定義一函數：

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \phi_3 B^3 - \dots - \phi_p B^p$$

其中 B 為後移運算子 (Backshift operator) $BZ_t = Z_{t-1}$

$$B^2 Z_t = Z_{t-2}$$

因此 (5-1) 式可縮寫成

$$\phi(B) W_t = a_t \quad \dots \quad (5-2)$$

或

$$W_t = \phi^{-1}(B) a_t = \psi(B) a_t$$

其中 $\psi(B) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i B^i$ 特稱為 ψ 權重 (weights)。

q 階移動平均模式，簡寫 MA(q) 模式，以下式表之：

$$W_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad \dots \quad (5-3)$$

其中 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_q$ 為 MA(q) 模式之 q 項參數， $a_t, a_{t-1}, \dots, a_{t-q}$ 為白噪音。

另定義一函數：

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q$$

$$\text{則 } W_t = \theta(B) a_t \quad \dots \quad (5-4)$$

$$\psi^{-1}(B) W_t = a_t \quad \text{或} \quad \pi(B) W_t = a_t$$

其中 $\pi(B) = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j B^j$ 特稱之為 π 權重。

綜合 (5-1), (5-3) 即為混合自迴歸—移動平均模式，簡寫成 ARMA(p, q)，以下式表之：

$$W_t = \phi_1 W_{t-1} + \phi_2 W_{t-2} + \dots + \phi_p W_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad \dots \quad (5-5)$$

$$\text{或縮寫成 } \phi(B) W_t = \theta(B) a_t \quad \dots \quad (5-6)$$

上式係適用於時間數列而屬定常性 (Stationary) 之狀況。所謂定常性之時間數列乃指觀測數列在平均值有限範圍內變動，其機率分佈不因時間而改變，亦即是該數列不顯示任何傾向或趨勢 (Trend)。事實上自然界甚多之時間數列均具某些傾向或趨勢，屬於非定常性 (Nonstationary) 事件，故

令 $W_t = \nabla^d Z_t$ (若 $d=0$, $W_t = Z_t - \mu$)

即 $\phi(B) \nabla^d Z_t = \theta(B) a_t \dots \dots \dots (8-7)$

則(5-7)式即稱為混合自迴歸~積分~移動平均模式，簡稱 ARIMA (p, d, q) Model。

其中 ∇^d 運算子之功能乃是將一非定常性之時間數列 Z_t ，取 d 次差分後變換為定常性之時間數列。

$$\nabla = 1 - B, \quad \nabla^2 = (1 - B)^2$$

一般實用上, $0 \leq p, d, q \leq 3$ 。

5-2 ARIMA 模式建立之程序

1. 對觀測物理量全盤瞭解後，決定欲採用之經驗模式類型。
2. 利用統計分析之方法鑑定模式之類型。
3. 由已知之觀測數列估計模式中各參數值。
4. 診斷並檢視該模式是否適合？是否能確切代表觀測數列？是否合乎精簡原則 (Principle of parsimony)？
5. 若模式檢視結果為合理，則可進一步用於分析及預測。若模式檢視結果不合適，需重新作 2~4 項工作，直至覓獲適當之模式為止。

茲將 1~5 項原則分述於后：

(一) 模式類型之鑑定 (Identification)

A. 非季節性模式 (Nonseasonal model)

若觀察物理量無明顯之週期性存在，可用非季節性時間數列模式處理之。該模式之鑑定，主要為利用自相關函數 (Auto-correlation function) 及偏自相關函數 (Partial Auto-correlation function) 之特性。

自相關函數，簡寫為 acf，其統計量可由下式求得：

$$\rho_k = \frac{E[(Z_t - \mu)(Z_{t+k} - \mu)]}{\sqrt{E[(Z_t - \mu)^2]E[(Z_{t+k} - \mu)^2]}} \dots \dots \dots (5-8)$$

其中 ρ_k 為稽延 k 時之自相關係數 (Autocorrelation at lag k)。

又令 δ_k 為 Z_t 及 Z_{t+k} 稽延 k 時之自協變方 (Autocovariance at lag k) 簡稱 acvf

$$\delta_k = \text{Cov}[Z_t, Z_{t+k}] = E[(Z_t - \mu)(Z_{t+k} - \mu)] \dots \dots \dots (5-9)$$

σ_z^2 在序率過程中， $t+k$ 時或 t 時均相同，即 $\sigma_z^2 = \delta_0$

故
$$\rho_k = \frac{\delta_k}{\delta_0}, \quad \rho_0 = 1 \dots \dots \dots (5-10)$$

在應用上，以 C_k 為 δ_k 之樣本，不偏估計值 (Unbiased estimate)

以 R_k 為 ρ_k 之樣本，不偏估價值

則
$$R_k = \frac{C_k}{C_0} \quad \text{稱之為 SACF (Sample autocorrelation function)}$$

其中
$$C_k = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-k} (Z_t - \bar{Z})(Z_{t+k} - \bar{Z}) \dots \dots \dots (5-11)$$

$$k = 0, 1, \dots, k \quad k \leq \frac{N}{4}$$

\bar{Z} 為時間數列之平均值。

N 為觀測物理量數目，

k 為稽延時間。

Bartlett 證明，當模式為 MA(q) 時，acf 之標準誤 (Standard error) 為

$$\text{Var}(R_k) \simeq \frac{1}{N} [1 + 2 \sum_{v=1}^q \rho_v^2] \quad , \quad k > q$$

$$\text{S. E.}(R_k) = \sqrt{\text{Var}(R_k)} \quad \dots \quad (5-12)$$

偏自相關函數 (Partial autocorrelation function) 簡寫為 pacf，其定義為

$$\phi_{kk} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \dots & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \dots & \rho_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \dots & \rho_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \dots & \rho_{k-2} \\ \rho_2 & \rho_1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \dots & 1 \end{vmatrix}} \quad \dots \quad (5-13)$$

pacf 之估計值可由式 (5-13) 中以 R_k 代 ρ_k 得之。

令 pacf 之樣本估計全為 $\hat{\phi}_{kk}$ ，Quenouille 證明當模式為 AR(p) 時，pacf 之估計標準誤為

$$\text{S. E.}(\hat{\phi}_{kk}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \quad k \geq p+1 \quad \dots \quad (5-14)$$

由觀測之時間數列為之 acf 及 pacf 可鑑定模式之類型，其原則為：

- (1) 若 acf 屬於尾消型 (Tail off)，且 $k \leq p$ 時，pacf 則為顯著。 $k > p$ 時 pacf 則為不顯著，此時吾人可鑑定此數列為 AR(p) 模式。
- (2) 若當 $k \leq q$ 時，acf 顯著， $k > q$ 時 acf 為不顯著，且 pacf 為尾消型，則可鑑定該數列為 MA(q) 模式。
- (3) 若 acf 稽延 $q-p+1$ 時始呈現指數 (Exponential) 及阻尼正弦波 (Damped sine wave) 混合型之衰退消失圖形，且 pacf 亦同，則可鑑定該數列為 ARMA(p, q) 模式。
- (4) 非常數性時間數列，由理論證明得悉，其 acf 不致迅速趨近於零，故吾人若先計算時間數列之差分值， $W_t = \nabla^d Z_t$ ， $d=0, 1, 2, \dots$ ，使差分數列之 acf 迅速趨於零，則最小之 d 值即為所需差分之次數。

B. 季節性模式 (Seasonal model)

許多經濟、氣象及水文等觀測物理量均存有一強列之季節性波動 (Seasonal behavior) 其週期為 S，Box-Jenkins 採用 $(p, d, q) \times (P, D, Q)_S$ 之相乘季節性模式。

季節性 ARIMA 模式之組成有兩大主體：

(1) 週期變化部份：

若觀測數列具有 S 之季節性週期存在，可以下式表之：

$$\begin{aligned} & (1 - \phi_1^* B^S - \dots - \phi_p^* B^{pS})(1 - B^S)^D W_t \\ & = (1 - \theta_1^* B^S - \dots - \theta_q^* B^{qS}) e_t \quad \dots \quad (5-15) \end{aligned}$$

式中 $\phi_1^*, \phi_2^*, \dots, \phi_p^*$ 為季節性 AR(p) 模式之 p 項係數，

D 為差分次數，

$\theta_1^*, \theta_2^*, \dots, \theta_q^*$ 為季節性 MA(Q) 模式之 Q 項係數，
 $\{e_t\}$ 為另一時間數列。

(2) 非週期變化部份：

$$(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p)(1 - B)^d e_t = (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q) a_t \quad \dots \quad (5-16)$$

式中

$\{a_t\}$ 數列滿足常態分佈，期望值為 0，變異數為 σ_a^2 。

聯合 (5-15) 式及 (5-16) 式，可得季節性 ARIMA 之一般式：

$$\phi_p(B)(1-B)^d \phi_p^*(B^s)(1-B^s)^D W_t = \theta_q(B) \theta_q^*(B^s) a_t \quad \dots \quad (5-17)$$

其中 $\phi_p(B) = (1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p)$

$\theta_q(B) = 1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q$

$\phi_p^*(B^s) = 1 - \phi_1^* B^s - \dots - \phi_p^* B^{ps}$

$\theta_q^*(B^s) = 1 - \theta_1^* B^s - \dots - \theta_q^* B^{qs}$

式 (5-17) 稱為 $(p, d, q) \times (P, D, Q)$ 相乘季節性模式。

(二) 模式中各參數值之估計 (Estimation)

模式經鑑定步驟後，可得一隨機模式 (式 5-16 或式 5-17) 模式中之各參數 $\phi_1, \theta_1, \phi_p, \theta_q, \dots$ 等，可先查圖表獲得一初始參數值代入模式可求其 W_t 並藉下列二法求參數之精確值。

A. 貝氏最大或是函數 (Bayesian Maximum likelihood function)

$$\text{令 } S(\underline{\phi}, \underline{\theta}) = \sum_{t=-n}^n [a_t | \underline{W}, \underline{\phi}, \underline{\theta}]^2 = \sum_{t=-n}^n [a_t | \underline{Z}, \underline{\phi}, \underline{\theta}]^2$$

其中 $[a_t | \underline{W}, \underline{\phi}, \underline{\theta}]$, $E[a_t | \underline{W}, \underline{\phi}, \underline{\theta}] = [a_t]$

表條件期望值，當 $\min S(\underline{\phi}, \underline{\theta})$ 時，可得 $\underline{\phi}, \underline{\theta}$ 之精確值。

B. 殘差 (Residual) 之非線性最小平方差法 (Non-linear least square error method)：

以 Marquard 數值解析法，配合一般線性迴歸分析模式，經過若干次疊代 (Iterations) 計算，得 $\underline{\phi}, \underline{\theta}$ 之較精確估計值。

(三) 模式診斷 (Diagnostic checking)

當模式經鑑定，參數估計後，可用於預測或控制一現象或系統。但是否能最佳擬合 (Fit) 觀測時間數列，則需進一步作診斷工作，診斷方法有下述兩種：

A. 殘差數列自相關之個別檢定：

設鑑定之模式為

$$\phi_p(B) \nabla^d Z_t = \theta_q(B) a_t \quad \dots \quad (5-18)$$

其 ℓ, s, e (Least-square estimation) 為 $\hat{\phi}, \hat{\theta}$

$$\text{令 } \hat{a}_t = \hat{\theta}_q^{-1}(B) \hat{\phi}_p(B) W_t \quad W_t = \nabla^d Z_t$$

$$\hat{a}_t = a_t + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$$

當 $n \rightarrow \infty$ $\hat{a}_t \rightarrow \infty$

因此可用 $\{\hat{a}_t\}$ 以檢視所鑑定之模式。依 Anderson 1942 年所提示之方法：

(1) 先計算 \hat{a}_t 數列之 acf

$$R_k(\hat{a}_t) = \frac{C_k(\hat{a}_t)}{C_0(\hat{a}_t)} \quad \dots \quad \dots \quad (5-19)$$

式中 $C_k(\hat{a}_t) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-k} (\hat{a}_t - \bar{a}_t)(\hat{a}_{t+k} - \bar{a}_t)$

(2)由計算之 $R_k(\hat{a}_t)$ 值，以95%之信賴水準 (Confidence level) 即兩倍 $S. E(R_k) = \frac{2}{\sqrt{N}}$ ，逐一檢查 $R_k(\hat{a}_t)$ ， $k=1, 2, \dots, k$ 是否超過此 $\frac{2}{\sqrt{N}}$ ，若 $R_k(\hat{a}_t)$ 均甚小，且以零為中心呈隨機分佈，則(5-18)式之時間數列可被採用。反之，則所選之模式需修正或捨棄。

B. 殘差數列自相關之總體檢定，或稱波特曼脫檢定 (Portmanteau lack of fit test)

設一 ARIMA (p, d, q) 數列 $\{Z_t\}$ 被鑑定後，其殘差數列 $\{\hat{a}_t\}$ 之 acf 為

$$\{R_k(\hat{a}_t)\}_{k=1}^k$$

定義 $Q = n' \sum_{k=1}^k R_k^2(\hat{a}_t) \quad \dots \quad \dots \quad (5-20)$

並以 $\chi^2_{(k-p-q)}$ 為其近似分佈。

其中 $n' = N-d$ ， n' 為實際 $\{\hat{a}_t\}$ 數列之個數，

一般取 95% 之信賴水準。

C. 累積週期圖檢驗 (Cumulative periodogram check)

本法較適合於季節性模式，是 Bartlette 氏於 1966 年提出。除可分辨數列是否為不相關外，尚能偵測某種形式之相關。

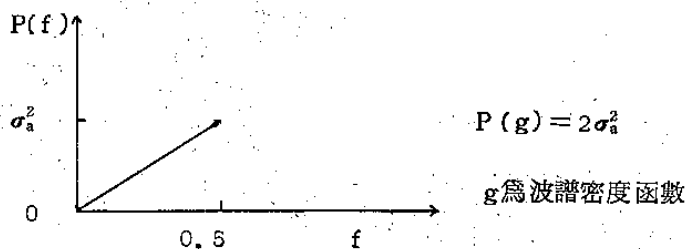
數列 $\{a_t\}$ 之週期值定義：

$$I(f_i) = \frac{2}{N} \left[\left(\sum_{t=1}^N a_t \cos 2\pi f_i t \right)^2 + \left(\sum_{t=1}^N a_t \sin 2\pi f_i t \right)^2 \right] \quad \dots \quad (5-21)$$

且其能量波譜 (Power spectrum) 為一常數值 $2\sigma_a^2$ 。

設循環期之頻率範圍為 $0 \sim 0.5$ ，則白噪音之累積波譜值為

$$P(f) = \int_0^f P(g) dg \quad \dots \quad \dots \quad (5-22)$$



實用上，以 $I(f_i)$ 為頻率 f 之能量波譜不偏估計值。

$$E[I(f)] = 2\sigma_a^2 \quad \dots \quad \dots \quad (5-23)$$

以 $\frac{1}{N} \sum I(f_i)$ 為頻率 f 之累積波譜不偏估計值。

$$E[P(f)] = \frac{1}{N} \sum I(f_i) \quad \dots \quad \dots \quad (5-24)$$

令 $C(f_i)$ 表正常化之累積週期值， s_a^2 為 σ_a^2 之不偏估計值，

$$\text{則 } C(f_i) = \frac{\sum I(f_i)}{N s_a^2} \quad \dots \quad \dots \quad (5-25)$$

另外，可以 Kolmogorov-Smirnov 檢定 \hat{a}_t 是否為白噪音。

5-3 模式預測 (Forecasting)

當序率模式經診斷後皆能擬合觀測之物理量，該模式即可用以預測未知物理量，以時間座標 t 為原點，預測 $t + \ell$ 時之物理量 $\hat{Z}_t(\ell)$ 。茲列述之如下：

設序率模式
$$W_t = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j W_{t-j} + a_t \quad \dots \quad (5-26)$$

則 $a_t = (1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \dots) W_t = \pi(B) W_t \quad \dots \quad (5-27)$

令 $\varphi(B) = \phi(B) \nabla^d$ 則 (5-6) 式為

$$\varphi(B) W_t = \theta(B) a_t \quad \dots \quad (5-28)$$

將 (5-27) 式代入 (5-28) 式，得

$$\varphi(B) W_t = \theta(B) \pi(B) W_t$$

即 $\pi(B) = \varphi(B) \theta^{-1}(B) \quad \dots \quad (5-29)$

所以，診斷模式後，以 (5-28) 式之 $\varphi(B)$ 及 $\theta(B)$ 代入 (5-29) 式可求出 π_j ，再代回 (5-26) 式，並假設 $t + \ell$ 時預測之 $\hat{a}_t(\ell)$ 其 $E[\hat{a}_t(\ell)] = 0$ ， $t + \ell$ 時之最佳預測值為

$$\hat{Z}_t(\ell) = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j \hat{Z}_t(\ell-j) \quad \dots \quad (5-30)$$

式中 $\hat{Z}_t(-j) = \hat{Z}_{t-j}$ ， $j=0, 1, 2, \dots$

(5-30) 式予以展開，得一預測公式

$$\hat{Z}_t(\ell) = \pi_1 \hat{Z}_t(\ell-1) + \dots + \pi_{\ell-1} \hat{Z}_t(1) + \pi_{\ell} \hat{Z}_t + \pi_{\ell+1} \hat{Z}_{t-1} \dots \quad (5-31)$$

5-4 ARIMA 模式在水文乾早上之應用

(一) 月降水量分析

A. 資料：1963年1月～1976年12月台北逐月總降水量記錄為例。(21, 23)

B. 計算步驟：

(1) 計算稽延 1 月到稽延 36 月之 acf，如表 (5-1)，並點繪如圖 (5-1) 呈明顯波動變化，且在稽延 1, 24, 24, 36 月處有高峰出現，顯然有週期為 12 之季節性變化存在，故取 $s=12$ 。

(2) 令 $Y_t = (1 - B^{12}) Z_t$ ，再求 Y_t 之 acf，結果如表 (5-2)，圖 (5-2)，稽延 1 2 者大於 $\frac{2}{\sqrt{N}}$ ，稽延 3 者等於 $\frac{2}{\sqrt{N}}$ ，其餘諸值均小於 $\frac{2}{\sqrt{N}}$ 。

(3) 求 Y_t 之 pacf，如表 (5-3)，圖 (5-3)，稽延 12, 24, 36 者顯著大於 $\frac{2}{\sqrt{N}}$ ，稽延 3 者約等於 $\frac{2}{\sqrt{N}}$ ，故初步鑑定模式為

$$(1 - \phi_3 B^3)(1 - \phi_{12}^* B^{12})(1 - B^{12}) Z_t = \theta_0 + (1 - \theta_3 B^3)(1 - \theta_{12}^* B^{12}) a_t \quad \dots \quad (5-32)$$

(4) 估計各參數得

$$\begin{aligned} \phi_3 &= -0.007 & \phi_{12}^* &= -0.185 & \theta_0 &= 5.668 \\ \theta_3 &= -0.046 & \theta_{12}^* &= 0.83 \end{aligned}$$

(5) 模式診斷，其殘差平方和為 2.31×10^6 ，殘差之 acf 及 pacf 如表 (5-4)，(5-5)，圖 (5-4)，(5-5)，由此二圖表可見稽延 9 之 acf 及 pacf 較為顯著，模式乃修正為：

$$(1 - \phi_3 B^3 - \phi_9 B^9)(1 - \phi_{12}^* B^{12})(1 - B^{12})Z_t = \theta_0 + (1 - \theta_3 B^3 - \theta_9 B^9)(1 - \theta_{12}^* B^{12})a_t \quad \dots \quad (5-33)$$

各參數重新估計

$$\begin{aligned} \phi_3 &= 0.09 & \phi_9 &= -0.147 & \phi_{12}^* &= 0.06 \\ \theta_0 &= 5.508 & \theta_3 &= -0.016 & \theta_9 &= 0.04 & \theta_{12}^* &= 0.83 \end{aligned}$$

節診斷後，知其殘差平方和為 2.29×10^6 ，表(5-6)，(5-7)，圖(5-6)，

(5-7)分別為此修正模式之 acf 及 pacf。兩圖表皆不顯著， $Q=18.9 < \chi_{(29)}^2$ 。

(6)各參數之相關性如表(5-8)，由此表可知 ϕ_3 與 θ_3 ， ϕ_9 及 θ_9 間有甚高之相關性，為符合模式之精簡原則，捨去參數較小之 θ_3 及 θ_9 ，則模式為

$$(1 - \phi_3 B^3 - \phi_9 B^9)(1 - \phi_{12}^* B^{12})(1 - B^{12})Z_t = \theta_0 + (1 - \theta_{12}^* B^{12})a_t \quad \dots \quad (5-34)$$

各參數之估計值

$$\begin{aligned} \phi_3 &= 0.107 & \phi_9 &= -0.174 & \phi_{12}^* &= -0.05 \\ \theta_0 &= 5.26 & \theta_{12}^* &= 0.839 \end{aligned}$$

殘差平方和為 2.30×10^6 ，表(5-9)，(5-10)，圖(5-8)，(5-9)分別為

(5-34)式殘差之 acf 及 pacf，兩圖表皆不顯著， $Q=18.4 < \chi_{(31)}^2$ 。

(7)由表(5-11)知(5-34)式各參數間相關係數甚小。

(8)故可確定(5-34)式為最佳模式，展開得

$$\begin{aligned} Z_t &= \phi_3 Z_{t-3} + Z_{t-12} + \phi_{12}^* Z_{t-12} - \phi_3 \phi_{12}^* Z_{t-15} - \phi_3 Z_{t-15} + \phi_{12}^* Z_{t-24} \\ &\quad - \phi_3 \phi_{12}^* Z_{t-27} + \theta_0 + a_t - \theta_{12}^* a_{t-12} \quad \dots \quad (5-35) \end{aligned}$$

上式 Z_t 受前 3, 12, 15, 24, 27 等月份降水量之影響並受前 12 月及當月擾動之影響。

C. 模式預測：

自 1974 年 1 月開始作逐月預測，並與實際降水比較如圖(5-10)，實線表模式預測值，虛線表實測值，兩者雖然不能照合（由於降水量之 acf 甚小僅 $-0.3 \sim 0.3$ 之故），但其所形成之趨勢(Trend)頗為近似，而可作為參考。

表 5-1：台北月降水量時列之 acf

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
R_k	0.21	0.04	0.06	-0.15	-0.23	-0.18	-0.19	-0.12	-0.06	0.06	0.23	0.23
S. E (R_k)	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.10
k	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
R_k	0.13	0.03	-0.03	-0.10	-0.16	-0.19	-0.21	-0.03	-0.00	-0.11	0.23	0.24
S. E (R_k)	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11
k	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	34	36
R_k	0.14	0.02	-0.00	-0.14	-0.19	-0.23	-0.07	-0.09	0.11	0.14	0.16	0.30
S. E (R_k)	0.11	0.11	0.11	0.11	0.12	0.12	0.12	0.12	0.12	0.12	0.12	0.12

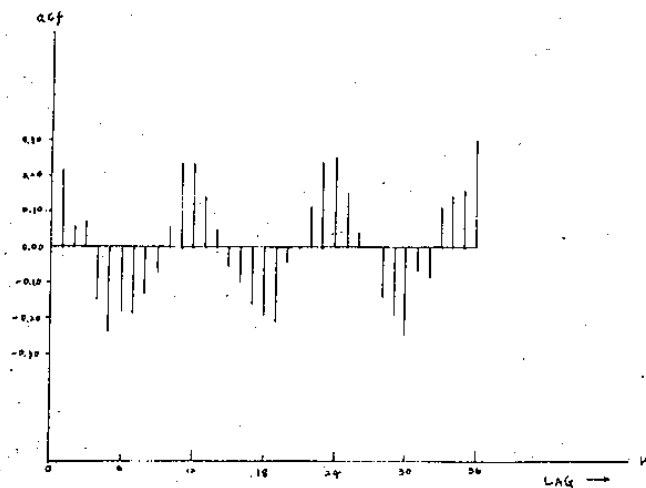


表 5-2: 台北月降水量季節差分之 acf

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
R_k	0.05	-0.00	0.16	-0.05	-0.05	0.02	0.05	-0.04	-0.14	-0.03	-0.02	-0.48
S. E(R_k)	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08
k	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
R_k	-0.08	-0.01	-0.07	0.07	0.07	0.02	-0.13	0.09	-0.05	0.00	0.06	-0.03
S. E(R_k)	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10
k	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
R_k	0.02	0.02	0.03	-0.06	-0.00	-0.05	0.14	-0.03	0.10	0.14	-0.07	0.06
S. E(R_k)	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10

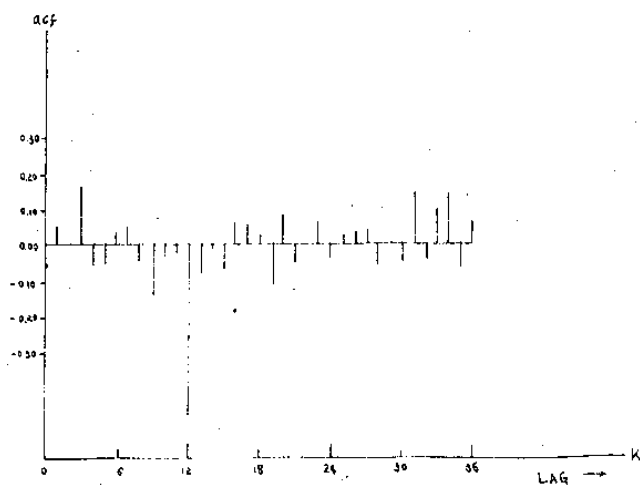


圖 5-2 台北月降水量季節差分之 acf 圖

表 5-3: 台北月降水量季節差分之 pacf

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\hat{\phi}_{kk}$	0.05	-0.00	0.16	-0.07	-0.05	0.00	0.07	-0.03	-0.15	-0.04	0.01	-0.45
k	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$\hat{\phi}_{kk}$	-0.07	-0.03	0.08	0.04	0.02	0.04	-0.14	0.08	-0.22	0.01	0.01	-0.31
k	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
$\hat{\phi}_{kk}$	-0.02	-0.02	0.10	-0.06	0.05	-0.04	0.05	0.02	-0.07	0.16	-0.03	-0.12

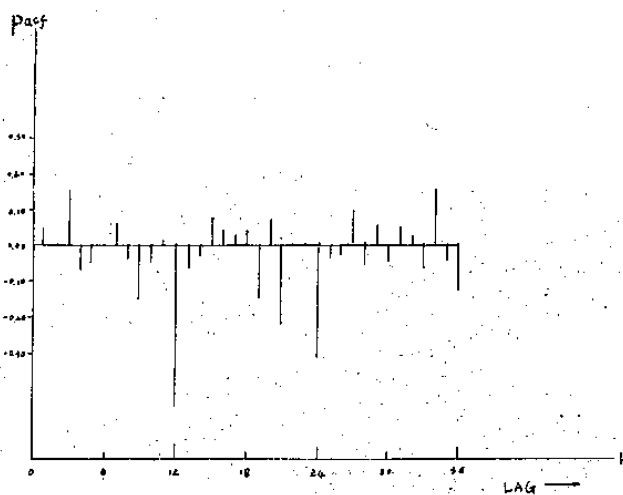


圖 5-3: 台北月降水量季節差分之 pacf 圖

表 5-4: 台北月降水量(5-32)式殘差之 acf

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
R_k	0.07	-0.05	0.02	-0.09	0.00	0.11	0.02	-0.04	-0.19	-0.02	0.07	0.09
S. E(R_k)	0.08	0.08	0.08	0.08	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09
k	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
R_k	-0.06	-0.05	-0.07	-0.03	0.09	0.05	-0.03	0.04	-0.11	0.10	0.10	0.00
S. E(R_k)	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.10
k	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
R_k	-0.04	-0.05	-0.01	-0.03	0.03	-0.06	0.11	-0.04	0.01	0.18	0.02	-0.02
S. E(R_k)	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10

圖 5-4：台北月降水量(5-32)式殘差之 acf 圖

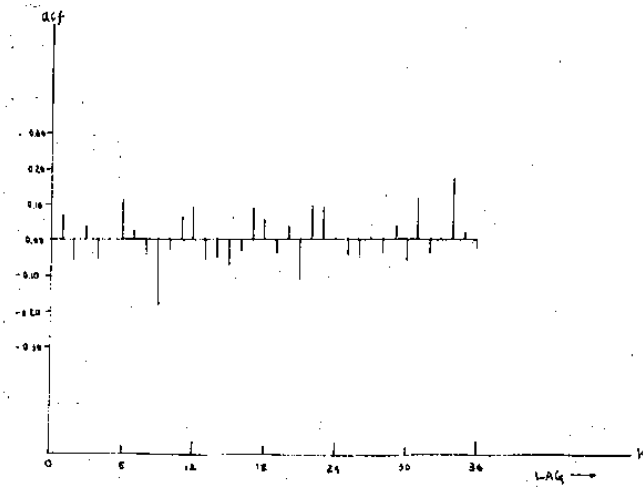


表 5-5：台北月降水量(5-32)式殘差之 pacf

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\hat{\phi}_{kk}$	0.07	-0.06	0.03	-0.10	0.02	0.10	0.10	-0.04	-0.19	0.02	0.05	0.09
k	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$\hat{\phi}_{kk}$	-0.12	-0.03	-0.03	0.01	0.06	-0.03	-0.02	0.07	-0.07	0.10	0.03	-0.00
k	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
$\hat{\phi}_{kk}$	-0.05	-0.01	0.04	-0.07	0.02	-0.11	0.22	-0.07	0.07	0.09	0.02	0.03

圖 5-5：台北月降水量(5-32)式殘差之 pacf 圖

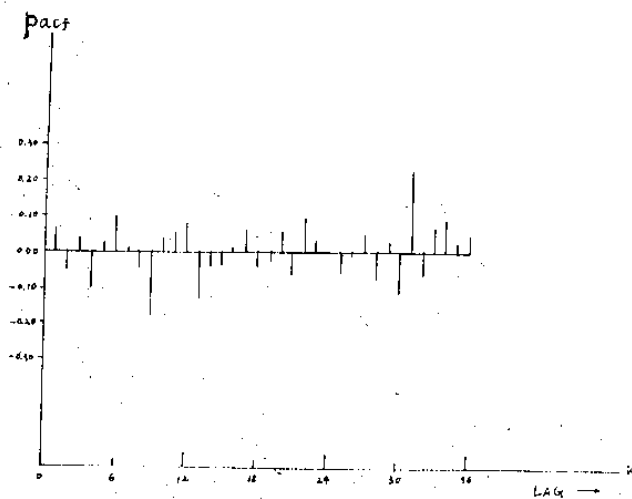


表 5-6: 台北月降水量(5-33)式殘差之 acf

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
R_k	0.08	-0.04	-0.01	-0.12	-0.06	0.11	0.00	-0.02	0.01	-0.02	0.06	0.04
S. E(R_k)	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09
k	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
R_k	-0.05	-0.04	-0.05	-0.03	0.03	0.05	-0.09	0.04	-0.09	0.09	0.08	0.05
S. E(R_k)	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09
k	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
R_k	-0.02	-0.02	0.03	-0.06	0.01	-0.06	0.09	-0.03	0.04	0.17	0.01	0.02
S. E(R_k)	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.10	0.10	0.10	0.10

圖 5-6: 台北月降水量(5-33)式殘差之 acf圖

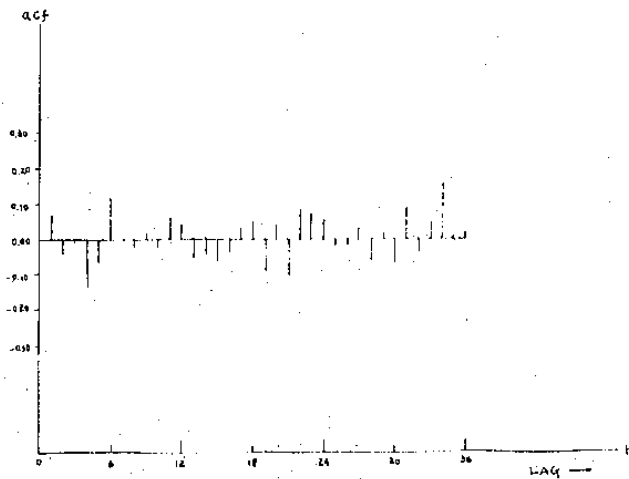


表 5-7: 台北月降水量(5-33)式殘差之 pacf

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\hat{\phi}_{kk}$	0.08	-0.04	-0.00	-0.13	-0.04	0.11	-0.02	-0.03	-0.00	0.00	0.07	0.01
k	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$\hat{\phi}_{kk}$	-0.05	-0.03	-0.04	-0.01	0.01	0.03	-0.10	0.06	-0.10	0.13	0.03	0.04
k	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
$\hat{\phi}_{kk}$	-0.02	-0.01	0.08	-0.08	-0.00	-0.08	0.14	-0.07	0.05	0.14	-0.01	0.08

圖 5-7：台北月降水量 (5-33) 式殘差之 pacf 圖

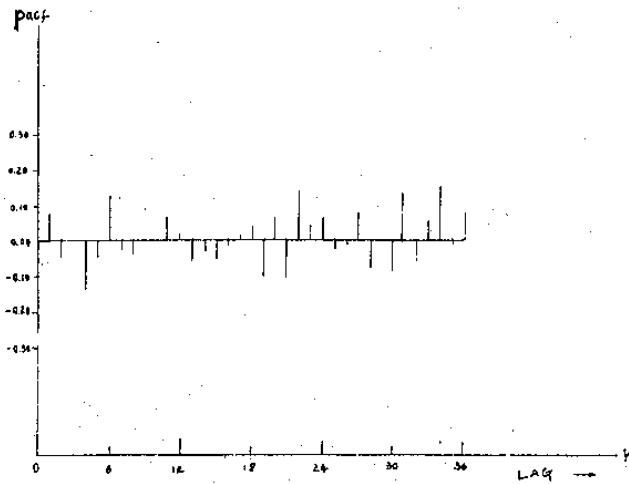


表 5-8：(5-33) 式各參數相關係數表

	ϕ_3	ϕ_9	ϕ_{12}	$^*\theta_0$	θ_3	θ_9	θ_{12}^*
ϕ_3	1.0000						
ϕ_9	-0.2100	1.0000					
ϕ_{12}^*	0.5553	-0.1695	1.0000				
θ_0	-0.4377	-0.1637	-0.2846	1.0000			
θ_3	0.9779	-0.2156	0.5460	-0.4156	1.0000		
θ_9	-0.2032	0.9370	-0.1678	-0.1374	-0.2157	1.0000	
θ_{12}^*	0.0102	0.0547	0.3531	0.1654	0.0293	0.0324	1.0000

表 5-9：台北月降水量 (5-34) 式殘差之 acf

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
R_k	0.07	-0.04	-0.01	-0.12	-0.05	0.10	0.02	-0.02	-0.00	-0.03	0.04	0.04
S. E(R_k)	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09
k	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
R_k	-0.06	-0.04	-0.03	0.04	0.05	-0.08	0.04	-0.12	0.08	0.08	0.08	0.05
S. E(R_k)	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09
k	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
R_k	-0.02	-0.02	0.04	-0.05	0.02	-0.07	0.10	-0.04	0.01	0.16	-0.00	0.03
S. E(R_k)	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09

圖 5-8：台北月降水量(5-34)式殘差之 acf 圖

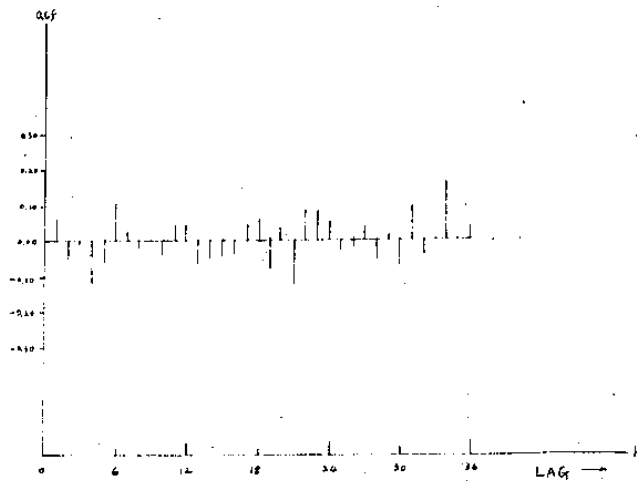


表 5-10：台北月降水量(5-34)式殘差之 pacf

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\hat{\phi}_{kk}$	0.07	-0.04	-0.00	-0.12	-0.03	0.10	0.0	-0.03	-0.01	-0.01	0.06	0.02
k	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$\hat{\phi}_{kk}$	-0.07	-0.03	-0.03	-0.01	0.02	0.02	-0.08	0.06	-0.13	0.13	0.02	0.05
k	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
$\hat{\phi}_{kk}$	-0.03	-0.00	0.08	-0.07	0.01	-0.09	0.15	-0.08	0.03	0.13	-0.02	0.08

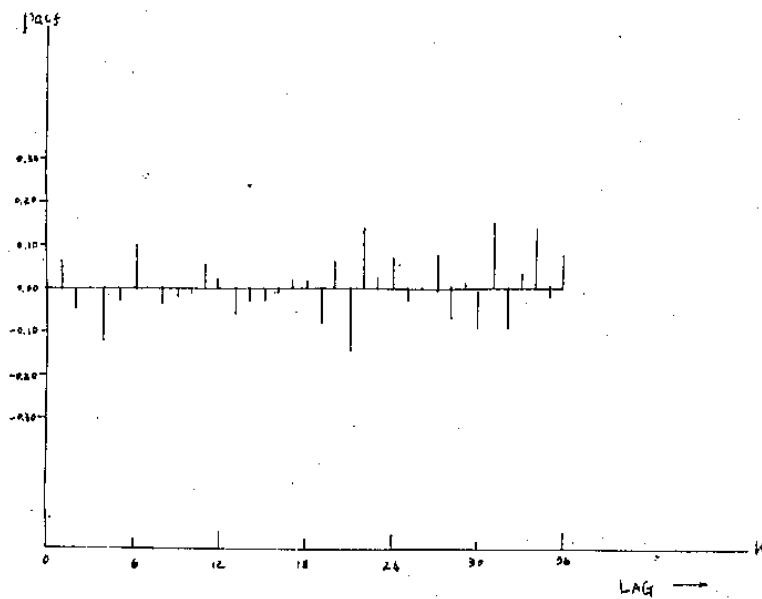
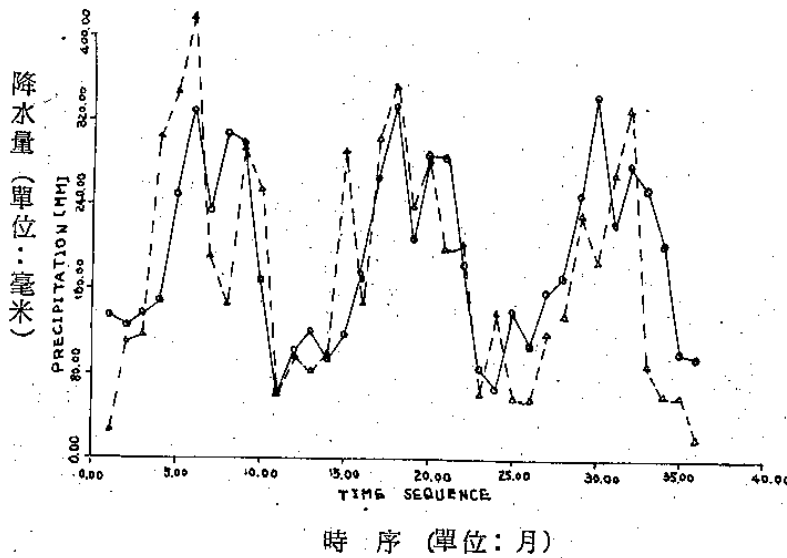


圖 5-9：台北月降水量(5-34)殘殘差之 pacf 圖

表 5-11: (S-34)式各參數相關係數表

ϕ_3	ϕ_3	ϕ_9	ϕ_{12}^*	θ_0	θ_{12}^*
ϕ_3	1.0000				
ϕ_9	-0.0866	1.0000			
ϕ_{12}^*	0.1048	0.0287	1.0000		
θ_0	-0.1537	-0.1436	-0.0913	1.0000	
θ_{12}^*	-0.0837	0.0652	0.4271	0.2095	1.0000

圖 5-10: 台北逐月降水量預報(1974年1月至1976年12月)
(實線為預測值, 虛線為實測值)



(二)月流量分析

A、資料: 1950年1月~1975年12月共計26年蘭陽溪蘭陽大橋測站流量記錄⁽²²⁾及1947年1月~1975年12月共計19年淡水河高義測站流量記錄為例, 先作一初步簡要之分析研究, 以了解ARIMA模式之適用情形, 而同時本研究亦積極進行此項問題之電子計算機模擬, 近期即可獲得若干成果, 而將於終期報告中提供參考。

B、計算步驟: 依據月降水量分析之各項步驟求得該兩站流量之最佳模式如下:

(1)蘭陽大橋站:

$$(1 - 0.2366B + 0.0182B^2) \nabla_{12} Z_t = -0.4561 + (1 - 0.8050B^{12}) a_t$$

... .. (5-36)

或展開之:

$$Z_t = -0.4561 + 0.2366Z_{t-1} - 0.0182Z_{t-2} + Z_{t-12} - 0.2366Z_{t-13} + 0.0182Z_{t-14} + a_t - 0.8050a_{t-12} \dots \dots (5-37)$$

(2)高義站：

$$Z_t = 0.18132Z_{t-1} + a_t + 0.13249a_{t-1} + 0.91526a_{t-2} - 0.0346a_{t-3} \dots \quad (5-38)$$

C、模式預測：由(5-37)式，可藉以預測1976年1月至12月蘭陽大橋站之值。茲以1975年12月之39.41cms，標號312為準，計算之：

$$\begin{aligned} \hat{Z}_{313} &= -0.4561 + 0.2366(39.41) - 0.0182(60.23) + 33.77 \\ &\quad - 0.2366(60.43) + 0.0182(212.84) + 0 - 0.8050(-0.523) \\ &= 31.54 \\ \hat{Z}_{314} &= -0.4561 + 0.2366(31.54) - 0.0182(39.41) + 18.14 \\ &\quad - 0.2366(33.77) + 0.0182(60.43) + 0 - 0.805(0.611) \\ &= 17.05 \\ \hat{Z}_{315} &= -0.4561 + 0.2366\hat{Z}_{314} - 0.0182\hat{Z}_{313} + \dots \\ &= 15.50 \\ &\vdots \end{aligned}$$

準此方式可逐次演算至無窮多，本文僅演算至 \hat{Z}_{324} ，並與實測值作比較列如表(5-12)並繪如圖(5-11)，由比較之結果顯示預測值與實測值不盡脛合接近，但信賴機率仍在95%信賴限度內，而其趨勢均大致相似。

表 5-12 蘭陽溪蘭陽大橋1976年預測值與實測值之比較表

月份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
實測值	24.94	14.98	10.27	9.44	14.37	13.71	10.55	16.84	48.69	18.69	12.78	8.36
預測值	31.54	17.05	15.50	17.38	21.15	30.27	21.85	73.92	50.14	185.64	61.03	39.51

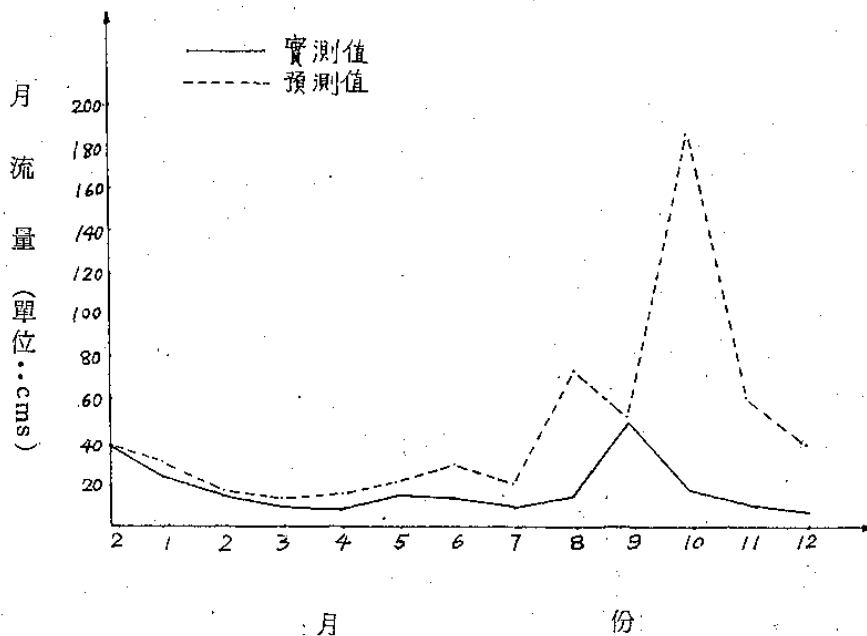


圖 5-11 蘭陽溪蘭陽大橋站1976年預測值與實測值之比較圖

其次由(5-38)式可以預測高義站 1974, 1975年之月流量值如表(5-13)及圖(5-12)

表 5-13 淡水河高義站1974及1975年預測值與實測值之比較表

1974 年	月份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	實測值	6.96	8.50	10.57	24.53	39.12	76.87	31.38	16.93	30.12	107.05	48.68	10.72
預測值	7.21	8.29	11.02	12.89	22.92	46.96	38.33	39.78	76.88	56.21	15.05	8.10	

1975 年	月份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	實測值	15.70	12.90	19.70	22.00	27.30	58.30	33.70	82.00	61.20	55.90	22.20	20.20
預測值	7.86	8.13	13.48	13.66	22.50	46.63	36.25	42.69	71.77	53.82	13.46	7.91	

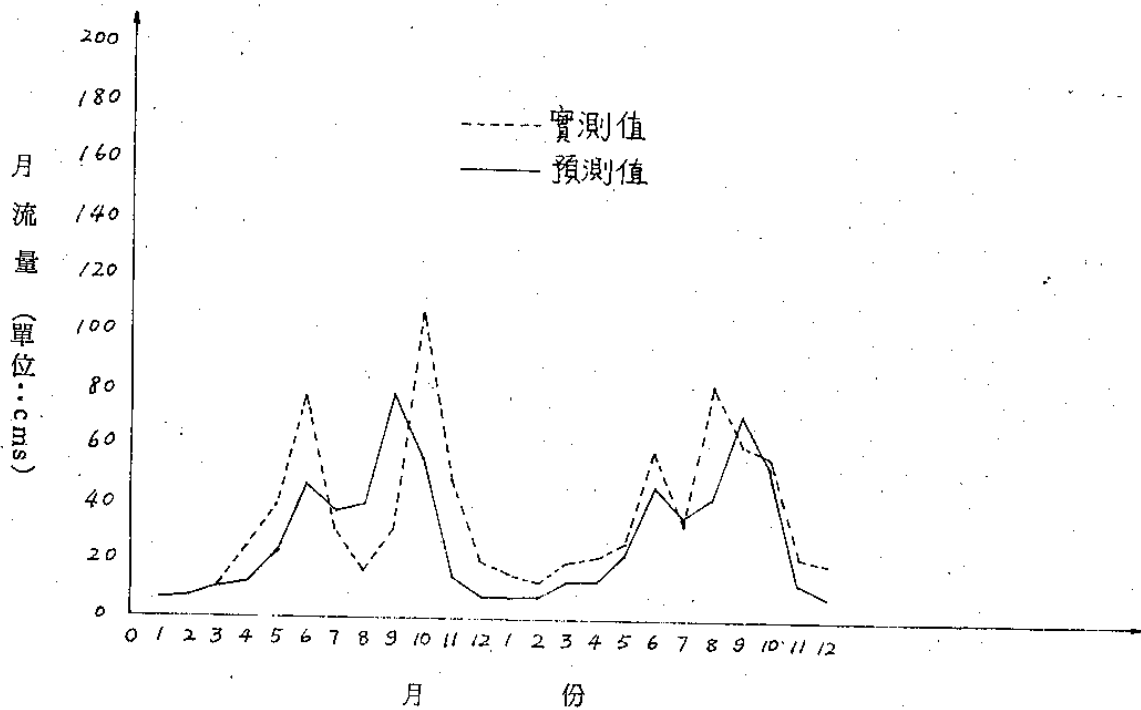
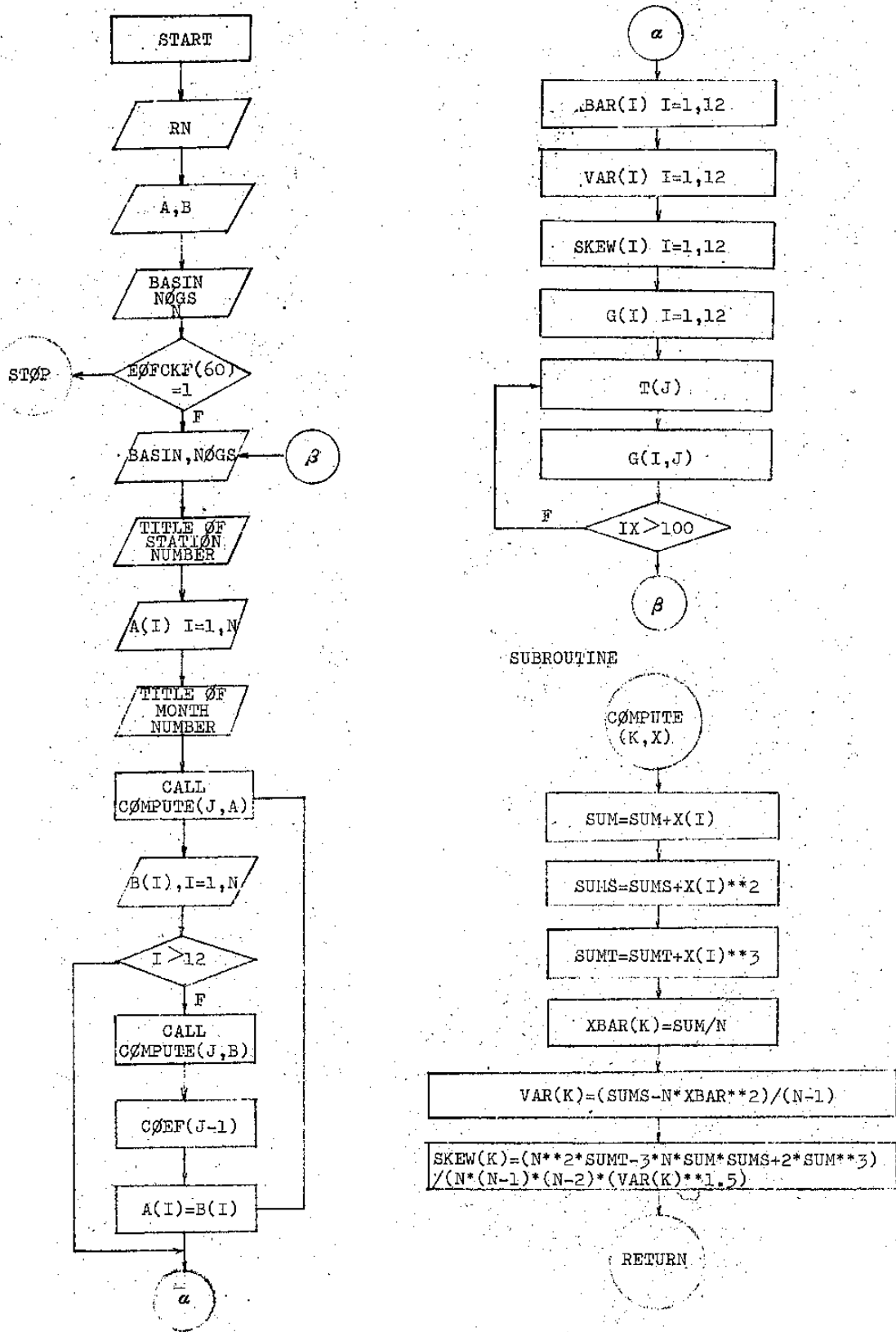


圖 5-12 淡水河高義站 1974及1975年預測值與實測值之比較圖

附錄(-)：河川流量繁衍模式電子計算機流程圖

The Computer Flow Chart for the Generation Model of Streamflow



二 參數 β, λ_1 日流量乾涸頻率方程式及 2 年、5 年、10 年、25 年、50 年週期之推求量

$y_2 = -0.37$ $y_6 = -1.5$ $y_{10} = -2.25$ $y_{25} = -3.20$ $y_{50} = -3.90$

編號	流域	站名	記數年數	平均乾涸 \bar{x}	標準偏差 s	變異係數 C_v	參數 λ_1	$\Gamma(1 + \lambda_1)$	特徵乾涸 β	乾涸頻率方程式 $D_T = \beta e^{\lambda_1 T}$	D_2	D_5	D_{10}	D_{25}	D_{50}
0301	淡水河	玉峰	24	3.00	0.81	0.27	0.24	0.90852	3.30	$D_T = 3.30e^{0.24y}$	3.02	2.30	1.90	1.53	1.29
0302	"	稜角	23	1.76	0.40	0.227	0.20	0.91817	1.92	$D_T = 1.92e^{0.20y}$	1.78	1.42	1.22	1.01	0.88
0305	"	石門	25	7.69	2.81	0.365	0.35	0.89115	8.63	$D_T = 8.63e^{0.35y}$	7.58	5.11	3.93	2.82	2.20
0310	"	福山	28	4.19	1.12	0.267	0.23	0.91075	4.60	$D_T = 4.60e^{0.23y}$	4.23	3.26	2.74	2.20	1.88
0313	"	新龜山	16	7.80	1.62	0.208	0.17	0.92670	8.42	$D_T = 8.42e^{0.17y}$	7.91	6.53	5.74	4.89	4.34
0318	"	乾溝	27	1.78	0.84	0.472	0.46	0.88560	2.01	$D_T = 2.01e^{0.46y}$	1.70	1.01	0.71	0.46	0.33
0324	"	小粗坑	20	11.46	3.00	0.262	0.23	0.91075	12.58	$D_T = 12.58e^{0.23y}$	11.55	8.91	7.50	6.03	5.13
0342	"	三光	17	3.69	0.73	0.198	0.17	0.92670	3.98	$D_T = 3.98e^{0.17y}$	3.74	3.08	2.72	2.31	2.05
0351	"	鳶山(3)	14	1.67	0.66	0.395	0.36	0.89018	1.88	$D_T = 1.88e^{0.36y}$	1.65	1.10	0.84	0.59	0.46
0354	"	霞雲	14	6.72	1.65	0.246	0.22	0.91311	7.36	$D_T = 7.36e^{0.22y}$	6.79	5.29	4.49	3.64	3.12
1006	蘭陽溪	蘭陽大橋	27	9.56	4.77	0.499	0.48	0.88575	10.79	$D_T = 10.79e^{0.48y}$	9.03	5.25	3.66	2.32	1.66
1310	頭前溪	二重埔	26	1.14	0.93	0.816	0.79	0.92877	1.23	$D_T = 1.23e^{0.79y}$	0.92	0.38	0.21	0.10	0.06
1704	中海溪	竹南	14	0.24	0.12	0.50	0.48	0.88575	0.27	$D_T = 0.27e^{0.48y}$	0.23	0.13	0.09	0.06	0.04
1901	後龍溪	打鹿坑	21	0.86	0.32	0.372	0.35	0.89115	0.97	$D_T = 0.97e^{0.35y}$	0.85	0.57	0.44	0.32	0.25
2304	大安溪	七塊厝	11	1.74	2.13	1.224	1.15	* 1.0730	1.62	$D_T = 1.62e^{1.15y}$	1.06	0.29	0.12	0.04	0.02
2508	大甲溪	天冷	12	5.75	1.79	0.311	0.28	0.90072	6.39	$D_T = 6.39e^{0.28y}$	5.76	4.20	3.40	2.61	2.14
2706	烏溪	柑子林	22	7.97	1.58	0.198	0.17	0.92670	8.60	$D_T = 8.60e^{0.17y}$	8.08	6.66	5.87	4.99	4.43
2921	濁水溪	集集	30	25.99	7.08	0.272	0.23	0.91075	28.54	$D_T = 28.54e^{0.23y}$	26.21	20.21	17.01	13.67	11.64
2931	"	櫻社	18	2.47	0.42	0.170	0.15	0.93304	2.65	$D_T = 2.65e^{0.15y}$	2.51	2.12	1.89	1.64	1.48
3004	花蓮溪	萬里橋	17	4.47	1.08	0.242	0.22	0.91311	4.90	$D_T = 4.90e^{0.22y}$	4.52	3.52	2.99	2.42	2.08
3012	"	水簾	23	6.73	1.31	0.195	0.17	0.92670	7.26	$D_T = 7.26e^{0.17y}$	6.82	5.63	4.95	4.21	3.74
3020	"	光復	17	2.99	1.27	0.425	0.40	0.88726	3.37	$D_T = 3.37e^{0.40y}$	2.91	1.85	1.37	0.94	0.71

附錄二：(續)

編號	流域	站名	記數年數	平均乾涸	標準偏差	變異係數	參數 $\hat{\lambda}_1$	$\Gamma(1 + \hat{\lambda}_1)$	特徵乾涸 $\hat{\beta}$	乾涸頻率方程式 $D_T = \hat{\beta} e^{\hat{\lambda}_1 T}$	D ₂	D ₅	D ₁₀	D ₂₅	D ₅₀
3309	北港溪	北港(2)	23	0.12	0.24	2.00	1.89	1.81134	0.07	$D_T = 0.07e^{1.89T}$	0.04	0.01	0	0	0
3409	秀姑巒溪	紅葉	13	0.57	0.20	0.351	0.34	0.89222	0.64	$D_T = 0.64e^{0.34T}$	0.56	0.38	0.30	0.22	0.17
3411	"	富源	18	3.24	1.25	0.386	0.36	0.89018	3.64	$D_T = 3.64e^{0.36T}$	3.19	2.12	1.62	1.15	0.89
3414	"	卓清	13	6.12	2.33	0.381	0.36	0.89018	6.88	$D_T = 6.88e^{0.36T}$	6.02	4.01	3.06	2.17	1.69
3415	"	合流點	11	26.15	3.61	0.138	0.13	0.93993	27.82	$D_T = 27.82e^{0.13T}$	26.51	22.89	20.76	18.35	16.76
3503	朴子溪	朴子(2)	26	0.02	0.04	2.00	1.89	1.81134	0.01	$D_T = 0.01e^{1.89T}$	0.01	0	0	0	0
2705	八掌溪	義竹	25	0.15	0.35	2.33	2.20	2.42397	0.06	$D_T = 0.06e^{2.20T}$	0.03	0	0	0	0
3512	急水溪	新營橋	16	0.09	0.09	1.00	1.00	1.00000	0.09	$D_T = 0.09e^T$	0.06	0.02	0.01	0	0
4003	卑南溪	新武呂	18	2.42	1.18	0.488	0.47	0.88563	2.73	$D_T = 2.73e^{0.47T}$	2.29	1.35	0.95	0.61	0.44
4007	"	延平	20	5.81	1.24	0.213	0.20	0.91817	6.33	$D_T = 6.33e^{0.20T}$	5.88	4.67	4.04	3.34	2.90
4011	"	台東大橋	30	7.27	5.12	0.704	0.70	0.90864	8.00	$D_T = 8.00e^{0.70T}$	6.17	2.80	1.66	0.85	0.52
4012	"	霧鹿	13	3.06	1.14	0.373	0.36	0.89018	3.44	$D_T = 3.44e^{0.36T}$	3.01	2.01	1.53	1.09	0.85
4102	曾文溪	照興(3)	16	1.53	0.79	0.516	0.49	0.88595	1.73	$D_T = 1.73e^{0.49T}$	1.44	0.83	0.57	0.36	0.26
4110	"	西港	17	0.06	0.11	1.833	1.80	1.67648	0.04	$D_T = 0.04e^{1.80T}$	0.02	0	0	0	0
4304	鹽水溪	關廟	23	0.12	0.05	0.417	0.39	0.88785	0.14	$D_T = 0.14e^{0.39T}$	0.12	0.08	0.06	0.05	0.03
4402	利嘉溪	利嘉(2)	15	0.27	0.27	1.00	1.00	1.00000	0.27	$D_T = 0.27e^T$	0.19	0.06	0.03	0.01	0
4501	二仁溪	崗山頭	21	0.01	0.02	2.00	1.89	1.81134	0.01	$D_T = 0.01e^T$	0	0	0	0	0
4601	知本溪	知本(3)	15	0.70	0.37	0.529	0.50	0.88623	0.79	$D_T = 0.79e^{0.5T}$	0.66	0.37	0.26	0.16	0.11
5118	高屏溪	小林(1)	15	1.89	0.88	0.466	0.45	0.88566	2.13	$D_T = 2.13e^{0.45T}$	1.80	1.08	0.77	0.51	0.37
5122	"	月眉	18	0.66	0.56	0.849	0.90	0.96177	0.69	$D_T = 0.69e^{0.90T}$	0.50	0.18	0.09	0.04	0.02
5126	"	九曲堂(2)	26	14.54	9.24	0.636	0.61	0.89468	16.25	$D_T = 16.25e^{0.61T}$	12.97	6.51	4.12	2.31	1.51
5126	"	老濃	18	8.89	3.32	0.373	0.36	0.89018	9.98	$D_T = 9.98e^{0.36T}$	8.74	5.82	4.44	3.15	2.45
5504	林邊溪	新埤	15	0.10	0.05	0.500	0.48	0.88575	0.11	$D_T = 0.11e^{0.48T}$	0.09	0.05	0.04	0.02	0.02

二 參數 β, λ_1 旬流量乾涸頻率方程式及 2 年、5 年、10 年、25 年、50 年、100 年週期之推求量

$y_2 = -0.37$ $y_5 = -1.5$ $y_{10} = -2.25$ $y_{25} = -3.20$ $y_{50} = -3.90$ $y_{100} = -4.60$

編號	流域名稱	流量站名	記錄年數	平均乾涸 \bar{x}	標準偏差 s	變異係數 C_v	參數 λ_1	$\Gamma(1 + \lambda_1)$	特徵乾涸 $\hat{\beta}$	乾涸頻率方程式 $D_T = \hat{\beta} e^{\lambda_1 T}$	D_2	D_5	D_{10}	D_{25}	D_{50}	D_{100}
0301	淡水河	玉峰	24	36.40	9.76	0.269	0.23	0.91075	39.97	$D_T = 39.97e^{0.23T}$	36.71	28.31	23.82	19.15	16.30	13.88
0302	"	稜角	23	20.03	5.97	0.298	0.25	0.90640	22.10	$D_T = 22.10e^{0.25T}$	20.15	15.19	12.59	9.93	8.34	7.00
0305	"	石門	25	92.55	31.22	0.337	0.33	0.89338	103.60	$D_T = 103.60e^{0.33T}$	91.69	63.15	49.31	36.04	28.60	22.70
0310	"	福山	28	51.00	14.25	0.279	0.24	0.90852	56.74	$D_T = 56.74e^{0.24T}$	51.92	39.59	33.07	26.32	22.25	18.81
0313	"	新龜山	16	96.27	23.76	0.247	0.22	0.91311	105.43	$D_T = 105.43e^{0.22T}$	97.19	75.80	64.27	52.15	44.70	38.32
0318	"	乾溝	27	28.70	13.66	0.476	0.46	0.88560	32.41	$D_T = 32.41e^{0.46T}$	27.34	16.26	11.51	7.44	5.39	3.91
0324	"	小粗坑	20	154.74	38.55	0.250	0.22	0.91311	169.46	$D_T = 169.46e^{0.22T}$	156.21	121.83	103.30	83.82	71.85	61.60
0342	"	三光	17	40.21	9.32	0.232	0.20	0.91817	43.79	$D_T = 43.79e^{0.20T}$	40.67	32.44	27.92	23.09	20.07	17.45
0351	"	崑山(3)	14	27.48	9.42	0.343	0.33	0.89338	30.76	$D_T = 30.76e^{0.33T}$	27.22	18.75	14.64	10.70	8.49	6.74
0354	"	霞雲	14	72.62	17.93	0.247	0.22	0.91311	79.53	$D_T = 79.53e^{0.22T}$	73.31	57.18	48.48	39.34	33.72	28.91
1006	蘭陽溪	蘭陽大橋	27	128.39	59.91	0.467	0.46	0.88560	144.98	$D_T = 144.98e^{0.46T}$	134.06	72.72	51.50	33.27	24.11	17.47
1310	頭前溪	二重埔	26	16.45	10.66	0.648	0.62	0.89592	18.36	$D_T = 18.36e^{0.62T}$	14.60	7.24	4.55	2.52	1.64	1.06
1704	中港溪	竹南	14	3.66	1.58	0.432	0.41	0.88676	4.13	$D_T = 4.13e^{0.41T}$	3.55	2.23	1.64	1.11	0.83	0.63
1901	後龍溪	打鹿坑	21	10.14	3.67	0.362	0.35	0.89115	11.38	$D_T = 11.38e^{0.35T}$	10.00	6.73	5.18	3.71	2.91	2.27
2304	大安溪	七塊厝	11	22.61	26.82	1.186	1.10	1.04649	21.61	$D_T = 21.61e^{1.10T}$	14.38	4.15	1.82	0.64	0.30	0.14
2508	大甲溪	天冷	12	87.22	25.64	0.294	0.25	0.90640	96.23	$D_T = 96.23e^{0.25T}$	94.03	66.14	54.83	43.24	36.30	30.47
2706	烏溪	柑子林	22	87.96	20.39	0.232	0.20	0.91817	95.80	$D_T = 95.80e^{0.20T}$	88.97	70.97	61.08	50.52	43.92	38.18
2921	濁水溪	集集	30	324.62	76.76	0.237	0.21	0.91558	354.55	$D_T = 354.55e^{0.21T}$	328.04	258.75	221.04	181.06	156.31	134.94
2931	"	櫻社	18	28.35	0.28	0.222	0.20	0.91817	30.88	$D_T = 30.88e^{0.20T}$	28.68	22.88	19.69	16.28	14.16	12.31
3004	花蓮溪	萬里橋	17	51.55	10.46	0.203	0.17	0.92670	55.63	$D_T = 55.63e^{0.17T}$	52.24	43.11	37.95	32.29	28.67	25.45
3012	"	水簾	23	78.04	16.96	0.217	0.20	0.91817	84.99	$D_T = 84.99e^{0.20T}$	78.94	62.97	54.20	44.82	38.97	33.87
3020	"	光復	17	35.38	15.34	0.434	0.40	0.88726	39.88	$D_T = 39.88e^{0.40T}$	34.39	21.87	16.21	11.09	8.38	6.33

編號	流域名稱	流量站名	記錄年數	平均乾涸	標準偏差	變異係數	參數 $\hat{\lambda}_1$	$\Gamma(1 + \hat{\lambda}_1)$	特徵乾涸 $\hat{\beta}$	乾涸頻率方程式 $D_T = \hat{\beta} e^{\hat{\lambda}_1 T}$	D ₂	D ₅	D ₁₀	D ₂₅	D ₅₀	D ₁₀₀
3309	北港溪	北港(2)	23	3.52	3.60	1.023	1.00	1.00000	3.52	$D_T = 3.52e^{0.17y}$	2.43	0.79	0.37	0.14	0.07	0.04
3409	秀姑巒溪	紅葉	13	6.98	2.44	0.350	0.34	0.89222	7.82	$D_T = 7.82e^{0.34y}$	6.90	4.70	3.64	2.63	2.08	1.64
3411	"	富源	18	36.00	12.61	0.350	0.34	0.89222	40.35	$D_T = 40.35e^{0.34y}$	35.58	24.23	18.78	13.59	10.71	8.45
3414	"	卓流	13	65.32	20.48	0.314	0.28	0.90072	72.52	$D_T = 72.52e^{0.28y}$	65.38	47.65	38.62	29.60	24.33	20.00
3415	"	奇美	11	277.71	57.37	0.207	0.17	0.92670	299.68	$D_T = 299.68e^{0.17y}$	281.41	232.23	204.43	173.94	154.43	137.10
3503	朴子溪	朴子(2)	26	0.50	0.73	1.460	1.38	1.02619	0.41	$D_T = 0.41e^{1.38y}$	0.25	0.05	0.02	0	0	0
3705	八掌溪	義竹	25	2.04	4.54	2.225	2.10	2.19762	0.93	$D_T = 0.93e^{2.10y}$	0.43	0.04	0	0	0	0
3912	急水溪	新營橋	16	2.69	1.84	0.684	0.67	0.90330	2.98	$D_T = 2.98e^{0.67y}$	2.33	1.09	0.66	0.35	0.22	0.14
4003	卑南溪	新武呂	18	28.57	13.90	0.487	0.47	0.88563	32.26	$D_T = 32.26e^{0.47y}$	27.11	15.94	11.20	7.17	5.16	3.71
4007	"	延平	20	65.01	15.14	0.232	0.20	0.91817	70.80	$D_T = 70.80e^{0.20y}$	65.75	52.45	45.14	37.33	32.46	28.21
4011	"	台東大橋	30	89.18	67.29	0.755	0.75	0.91906	97.03	$D_T = 97.03e^{0.75y}$	73.52	31.50	17.95	8.80	5.21	3.08
4012	"	霧鹿	13	32.83	12.95	0.394	0.37	0.88931	36.92	$D_T = 36.92e^{0.37y}$	32.20	21.19	16.06	11.30	8.72	6.73
4102	曾文溪	照興(3)	16	17.40	8.52	0.490	0.47	0.88563	19.65	$D_T = 19.65e^{0.47y}$	16.51	9.71	6.83	4.37	3.14	2.26
4110	"	西港	17	2.02	2.59	1.282	1.21	1.10785	1.82	$D_T = 1.82e^{1.21y}$	1.16	0.30	0.12	0.04	0.02	0.01
4304	鹽水溪	關廟	23	1.74	0.58	0.333	0.33	0.89338	1.95	$D_T = 1.95e^{0.33y}$	1.73	1.19	0.93	0.68	0.54	0.43
4402	利嘉溪	利嘉(2)	15	4.76	3.65	0.767	0.76	0.92137	5.17	$D_T = 5.17e^{0.76y}$	3.90	1.65	0.94	0.45	0.27	0.16
4501	二仁溪	崗山頭	21	0.41	0.88	2.146	2.04	2.03516	0.20	$D_T = 0.20e^{2.04y}$	0.09	0.01	0	0	0	0
4601	知本溪	知本(3)	15	9.22	4.32	0.467	0.45	0.88566	10.41	$D_T = 10.41e^{0.45y}$	8.81	5.30	3.78	2.47	1.80	1.31
5118	高屏溪	小林(1)	15	20.02	9.02	0.451	0.43	0.88604	22.60	$D_T = 22.60e^{0.43y}$	19.28	11.86	8.59	5.71	4.22	3.13
5122	"	月眉	18	9.26	8.30	0.896	0.86	0.94869	9.76	$D_T = 9.76e^{0.86y}$	7.10	2.69	1.41	0.62	0.35	0.19
5126	"	九曲堂(2)	26	167.58	83.92	0.501	0.48	0.88575	189.20	$D_T = 189.20e^{0.48y}$	158.41	92.09	64.25	40.72	29.10	20.80
5131	"	荖濃	18	99.16	35.28	0.356	0.34	0.89222	111.14	$D_T = 111.14e^{0.34y}$	98.00	66.74	51.72	37.44	29.51	23.26
5504	林邊溪	新埤	15	1.10	0.46	0.418	0.39	0.88785	1.24	$D_T = 1.24e^{0.39y}$	1.07	0.69	0.52	0.36	0.27	0.21

二 參數 β, λ_1 月流量乾涸頻率方程式及 2 年、5 年、10 年、25 年、50 年、100 年週期之推求量

$y_{\frac{1}{2}} = -0.37$ $y_5 = -1.50$ $y_{10} = -2.25$ $y_{25} = -3.20$ $y_{50} = -3.90$ $y_{100} = -4.60$

編號	流域名稱	流量站名	記錄年數	平均乾涸 \bar{x}	標準偏差 s	變異係數 C_v	參數 $\hat{\lambda}_1$	$\Gamma(1 + \hat{\lambda}_1)$	特徵乾涸 β	乾涸頻率方程式 $D_T = \hat{\beta} e^{\hat{\lambda}_1 T}$	D_2	D_5	D_{10}	D_{25}	D_{50}	D_{100}
0301	淡水河	玉峰	24	131.10	37.92	0.289	0.25	0.9064	144.64	$D_T = 144.64e^{0.25T}$	131.86	99.41	82.41	64.99	54.56	45.80
0302	"	稜角	23	73.06	24.69	0.338	0.33	0.89338	81.78	$D_T = 81.78e^{0.33T}$	72.38	49.85	38.92	28.45	22.58	17.92
0303	"	石門	25	358.05	106.26	0.297	0.25	0.9064	395.02	$D_T = 395.02e^{0.25T}$	360.12	271.49	225.08	177.49	149.00	125.08
0310	"	福山	28	206.57	112.63	0.545	0.52	0.88704	232.88	$D_T = 232.88e^{0.52T}$	192.12	106.75	72.28	44.10	30.65	21.30
0313	"	新龜山	16	409.82	144.76	0.353	0.34	0.89222	459.33	$D_T = 459.33e^{0.34T}$	405.03	275.83	213.74	154.74	121.97	96.14
0318	"	乾溝	27	173.34	90.53	0.522	0.50	0.88623	195.59	$D_T = 195.59e^{0.50T}$	162.56	92.39	63.50	39.49	27.83	19.61
0324	"	小粗坑	20	729.05	226.48	0.311	0.28	0.90072	809.41	$D_T = 809.41e^{0.28T}$	729.75	531.82	431.09	330.40	271.59	223.25
0342	"	三光	17	146.65	29.04	0.198	0.17	0.92670	158.25	$D_T = 158.25e^{0.17T}$	148.60	122.63	107.95	91.85	81.55	72.40
0351	"	震山(3)	14	133.09	53.73	0.404	0.38	0.88854	149.79	$D_T = 149.79e^{0.38T}$	130.14	84.71	63.70	44.40	34.03	26.08
0354	"	霞雲	14	257.86	62.37	0.242	0.22	0.91311	282.40	$D_T = 282.40e^{0.22T}$	260.32	203.02	172.14	139.68	119.74	102.65
1006	蘭陽溪	蘭陽大橋	27	531.64	239.05	0.450	0.44	0.88581	600.17	$D_T = 600.17e^{0.44T}$	510.00	310.20	223.00	146.82	107.90	79.30
1310	頭前溪	二重埔	26	71.63	48.26	0.674	0.66	0.90167	79.44	$D_T = 79.44e^{0.66T}$	62.23	29.52	17.99	9.61	6.06	3.82
1704	中港溪	竹南	14	23.07	12.74	0.552	0.53	0.88757	25.99	$D_T = 25.99e^{0.53T}$	21.36	11.74	7.89	4.77	3.29	2.27
1901	後龍溪	打鹿坑	21	40.38	17.53	0.434	0.41	0.88676	45.54	$D_T = 45.54e^{0.41T}$	39.13	24.62	18.10	12.26	9.20	6.91
2304	大安溪	七塊厝	11	92.62	90.08	0.973	0.95	0.97988	94.52	$D_T = 94.52e^{0.95T}$	66.51	22.73	11.15	4.52	2.33	1.20
2508	大甲溪	天冷	12	307.81	115.18	0.374	0.36	0.89018	345.78	$D_T = 345.78e^{0.36T}$	302.66	201.50	153.82	109.27	84.93	66.00
2706	烏溪	柑子林	22	314.09	72.28	0.230	0.20	0.91817	342.08	$D_T = 342.08e^{0.20T}$	317.68	253.42	218.12	180.38	156.81	136.33
2921	濁水溪	集集	30	1143.17	214.96	0.188	0.16	0.92980	1229.48	$D_T = 1229.48e^{0.16T}$	1158.81	967.14	857.78	736.82	658.75	588.95
2931	"	櫻社	18	102.02	26.92	0.264	0.23	0.91075	112.02	$D_T = 112.02e^{0.23T}$	102.88	79.33	66.76	53.66	45.68	38.89
3004	花蓮溪	萬里橋	17	177.25	38.12	0.215	0.19	0.92089	192.48	$D_T = 192.48e^{0.19T}$	179.41	144.75	125.52	104.79	91.74	80.32
3012	"	水簾	23	267.66	58.48	0.218	0.19	0.92089	290.65	$D_T = 290.65e^{0.19T}$	270.92	218.57	189.54	158.24	138.53	121.28
3020	"	光復	17	124.63	50.04	0.402	0.38	0.88854	140.26	$D_T = 140.26e^{0.38T}$	121.86	79.32	59.65	41.58	31.86	24.42

附錄四：(續)

編號	流域名稱	流量站名	記錄年數	平均乾涸	標準偏差	變異係數	參數 $\hat{\lambda}_1$	$\Gamma(1 + \hat{\lambda}_1)$	特徵乾涸 $\hat{\beta}$	乾涸頻率方程式 $D_T = \hat{\beta} e^{\hat{\lambda}_1 T}$	D_2	D_5	D_{10}	D_{25}	D_{50}	D_{100}
3309	北港溪	北港(2)	23	40.88	38.24	0.935	0.91	0.96523	42.35	$D_T = 42.35e^{0.91T}$	22.40	10.82	5.47	2.30	1.22	0.64
3409	秀姑巒溪	紅葉	13	28.03	12.53	0.447	0.43	0.88604	31.64	$D_T = 31.64e^{0.43T}$	26.99	16.60	12.02	7.99	5.92	4.38
3411	"	富源	18	125.04	40.53	0.324	0.30	0.89747	139.32	$D_T = 139.32e^{0.30T}$	124.68	88.83	70.94	53.35	43.24	35.05
3414	"	卓清	13	250.09	78.73	0.315	0.29	0.89904	278.14	$D_T = 278.14e^{0.29T}$	249.84	180.03	144.84	109.96	89.76	73.27
3415	"	合流	11	986.99	192.24	0.195	0.17	0.92670	1065.06	$D_T = 1065.06e^{0.17T}$	1000.13	825.33	726.53	618.18	548.83	487.25
3503	朴子溪	朴子(2)	26	3.86	5.62	1.456	1.38	1.22619	3.15	$D_T = 3.15e^{1.38T}$	1.89	0.40	0.14	0.04	0.02	0.01
3705	八掌溪	義竹	25	9.58	20.53	2.143	2.02	2.03741	4.70	$D_T = 4.70e^{2.02T}$	2.23	0.23	0.05	0.01	0	0
3912	急水溪	新營橋	16	11.68	8.21	0.703	0.70	0.90864	12.77	$D_T = 12.77e^{0.70T}$	9.86	4.47	2.64	1.36	0.83	0.51
4003	卑南溪	新武呂	18	112.91	53.03	0.470	0.45	0.88566	127.49	$D_T = 127.49e^{0.45T}$	107.94	64.91	46.32	30.21	22.04	16.09
4007	"	延平	20	211.87	64.59	0.305	0.27	0.90250	234.76	$D_T = 234.76e^{0.27T}$	212.44	156.58	127.88	98.95	81.91	67.80
4011	"	台東大橋	30	329.97	244.44	0.741	0.73	0.91467	360.75	$D_T = 360.75e^{0.73T}$	275.36	120.69	69.80	34.89	20.93	12.56
4012	"	霧鹿	13	125.79	55.35	0.440	0.42	0.88636	141.92	$D_T = 141.92e^{0.42T}$	121.49	75.59	55.16	37.01	27.59	20.56
4102	曾文溪	照興(3)	16	61.18	29.40	0.481	0.46	0.88560	69.08	$D_T = 69.08e^{0.46T}$	58.26	34.65	24.54	15.85	11.49	8.33
4110	"	西港	17	9.90	10.78	1.089	1.00	1.00000	9.90	$D_T = 9.90e^{1.00T}$	6.84	2.21	1.04	0.40	0.20	0.10
4304	鹽水溪	關廟	23	6.15	1.87	0.304	0.27	0.90250	6.81	$D_T = 6.81e^{0.27T}$	6.16	4.54	3.71	2.87	2.38	1.97
4402	利嘉溪	利嘉(2)	15	21.77	11.43	0.525	0.50	0.88623	24.56	$D_T = 24.56e^{0.50T}$	20.41	11.60	7.97	4.96	3.49	2.46
4501	二仁溪	崗山頭	21	3.31	6.25	1.888	1.79	1.66250	1.99	$D_T = 1.99e^{1.79T}$	1.03	0.14	0.04	0.01	0	0
4601	知本溪	知本(3)	15	37.43	19.73	0.527	0.50	0.88623	42.24	$D_T = 42.24e^{0.50T}$	35.11	19.95	13.71	8.53	6.01	4.23
5118	高屏溪	小林(1)	15	67.67	29.40	0.435	0.41	0.88676	76.31	$D_T = 76.31e^{0.41T}$	65.57	41.26	30.34	20.55	15.42	11.57
5122	"	月眉	18	35.57	28.76	0.809	0.81	0.93408	38.08	$D_T = 38.08e^{0.81T}$	28.22	11.30	6.15	2.85	1.62	0.92
5126	"	九曲堂(2)	26	557.17	263.72	0.473	0.45	0.88566	629.10	$D_T = 629.10e^{0.45T}$	532.61	320.31	228.56	149.05	108.78	79.38
5131	"	老濃	18	344.02	123.13	0.358	0.34	0.89222	355.58	$D_T = 355.58e^{0.34T}$	313.55	213.52	165.46	119.79	94.42	74.42
5504	林邊溪	新埤	15	4.15	1.82	0.439	0.42	0.88636	4.68	$D_T = 4.68e^{0.42T}$	4.01	2.49	1.82	1.22	0.91	0.68

六 結 論 與 建 議

- 6-1 乾旱為水文氣象水量較少時之極端現象，亦可稱謂旱象；其發生之原因多為氣候因子之影響，如久旱不雨，雨水匱乏，氣溫升高，蒸發量增加等等。本省雨量受自然環境之支配，旱象常發生於冬春之際，如以降雨記錄連續50日不降雨為小旱，連續100日不降雨為大旱分析研究之，則可推知大安溪以南西部地區大約每2至4年發生小旱一次，尤以烏溪以南之地區為最；而曾文溪與高屏溪流域大約每9至14年發生大旱一次。至於東北地區之宜蘭，東部地區之花蓮與台東等地乾旱發生之機會則較少，早期持續之日數亦較短，北部地區又較東部地區稍為嚴重，而西南部一帶，尤其沿海平原區，則旱象頻繁，亦即於集水區之下游所受乾旱程度與機會每較上游為甚。本省西南部地區為主要之農業區域，故乾旱災害之影響，實為本省嚴重問題之一，而需加以研究。
- 6-2 就本省河川流量分析之研究，可知北部、東部及中部地區河川之流量較為穩定，而能維持有正常之基流量。至於北港溪以南地區之河川，於10年迴歸週期時，河川常呈枯竭狀態；於乾涸頻率方程式中之 λ 值等於或大於0.5($\lambda \geq 0.5$)，則表示該河川流量有顯著之變異，如 $\lambda \geq 1.0$ 時，則該河川常呈枯竭狀態。然而南部地區為本省之主要農業區域，人口較密，需水量亦多，故應採取有效措施，蓄水保水以供乾旱時期之急需。
- 6-3 本研究係將台灣19條主要河川及7條次要河川流域內之降雨記錄及流量記錄，選擇其記錄完備者，先作極端值頻率分析之研究。由於所選擇河川實際水文記錄年數之不足，每不易由統計樣本參數值予以精確推估漫長水文時列之特性，故須以序率程序(Stochastic process)合成水文資料，以應研究之所需。本研究初步所採用之方法有序率繁衍法(Stochastically generation method)及自迴歸~積分~移動平均法(ARIMA)-pdq-method)，除此等方法模擬過去之實測記錄外，並欲期作適當之推估與預測。
- 6-4 有關水文系統之模擬，除初步應用以上之兩種方法外，並擬以聯程理論(Run theory)之最大負聯程長度(Largest negative run-length)與最大負聯程和(Largest negative run-sum)以及波譜分析(Spectrum analysis)等方法，比較研究分析，以期有效推估水文事象之或然發生。
- 6-5 水文事象尙少有能完全符合統計之理論，水文數據一般均具有“非隨機及非定常性”之特性，甚或所搜集之資料有錯誤者，故尙不易導得一簡單而完備之數理統計模式可以擬合水文之實測值；但若由導得之模式所求得之結果能位於可信限界範圍內(Confidence intervals)，即認為可被接受。按ARIMA(p, d, q)模式為針對序率水文事象而建立者，尙稱嚴密而合理，然用以模擬若干實測之記錄情況分析比較研究之，對其實用之價值乃有若干疑慮，尤以對乾旱問題之研究為然，故尙有待進一步之商榷，俟本研究得有具體結果後，將再作定論。
- 6-6 應用極端值理論作頻率之分析，係假設水文資料具有均一性，即過去觀測期間集水區之氣象、地文等因子均無重大之變異，且於未來歲月亦假設無重大之變異者。
- 6-7 水資源之開發利用，受乾旱之影響甚巨，今後對水土經濟之規劃，須對全省乾旱特性作更深入之了解，以期合理而作最佳最有效之運用。

七 參 考 文 獻

1. Statistical Techniques Based on Probabilistic Models, G. A. Baker, 1962. Prof. of Mathematics and Statistician, University of California at Davis.
2. Conditional Probabilities of Occurrence of Wet and Dry Years Over A Large Continental Area. Subin Pinkayan CSU Hydrology Paper, April 1966.
3. 非定常Markov過程應用於流量時系列之推定(基準濁水流量之推定方法論), 岸力博士, 1966年10月。係日本北海道開發局與北海道大學合作研究之「石狩川水利綜合開發計劃調查資料」。
4. An Objective Approach to Definitions and Investigations of Continental Hydrologic Droughts. Vujica Yevjevich Aug. 1967. C.S.U. Hydrology Paper No.23.
5. Proceedings of the International Hydrology Symposium Sep. 6-8, 1967 at Fort Collins, Colorado; U.S.A., Volume 1, Volume 2.
6. Probabilities of Observed Droughts No.12, Jaime Millan and Vujica Yevjevich, June 1 1971. C. S. U. Hydrology Paper No.50.
7. Synthetic Streamflows, Fiering & Jackson, American Geophysical Union, Water Resources Monograph, 1971.
8. "Stochastic Processes in Hydrology", V. Yevjevich, 1972.
9. Floods and Droughts, Proceedings of the 2nd International Symposium in Hydrology, Sep. 11-13, 1972 at Fort Collins, Colorado, U. S. A.
10. Time Series Analysis and Forecasting, O. D. Anderson, 1976.
11. Time Series Analysis, Forecasting and Control. Box & Jenkins, Revised ed. 1977.
12. Generation of Annual Streamflows Using A Filtered Fractional Gaussian Noise Model, R. Srikanthan & T. A. McMahon, 37 (1978) 13-21.
13. A Review of Lag-one Markov Models for Generation of Annual Flows, R. Srikanthan & T. A. McMahon, Journal of Hydrology, 37 (1978) 1-12.
14. 台灣集水區暴雨與乾旱頻率分析之研究, 王如意, 台灣水利 20卷4期, 民國六十一年十一月一日。
15. 應用統計之極端值理論分析台灣集水區水文頻率之研究, 王如意, 台灣水利 21卷3期, 民國六十二年九月一日。
16. 台灣集水區月河川流量模擬之研究, 王如意, 農工學報 20卷4期, 民國六十三年十二月十一日。
17. 日水河流域上游合成流量序率模式之研究, 陳明星, 台灣水利 23卷1期, 民國六十四年四月一日。
18. 德基、石門及曾文水庫長期距乾旱頻率分析之比較研究, 易任, 行政院國科會, 六十五年五月。
19. 農業氣象與水文, 易任, 王如意, 農工學會彙編, 民國六十五年九月。
20. 高等水文學講義精要, 易任, 台大農工研究所教材, 民國六十六年九月。
21. 氣象學報, 中央氣象局, 23卷3期, 民國六十六年九月。
22. 台灣河川月流量預報模式之研究, 李劍青, 成大碩士論文, 民國六十七年四月廿六日。
23. 台灣地區災變天氣研討會論文彙編, 國科會、中央研究院, 民國六十七年五月。
24. 台灣地區乾旱研究報告, 經濟部水資會, 民國六十七年六月。
25. 近兩年特異降雨分析, 林沛宇, 台灣水利 26卷3期, 民國六十七年九月一日。