

臺灣河川月流量預報模式之研究

郭金棟* 張玉田** 李劍青***

摘 要

本文以 Box-Jenkins 模式，根據水文數據的推計特性，探求台灣河川月流量的預報（測）模式。其中信賴界限，除由純統計所得者外，並於本文依水文統計特性提出修正方法。本文利用國立交通大學電子計算機中心 Decsystem-10 每試算一次約 CPU 一分鐘，容量佔 45K。

一、前 言

為求適當地設計和作業水資源計劃，經由時間來量度逕流、降水等有關水文現象是必需的。在解決該等水資源問題方面，時間數列分析成了一個很重要的工具，故 Box-Jenkins 推計（stochastic）模式族在分析自然的時間數列方面，具有特別的重要性。該書於 1970 年由 Box 氏和 Jenkins 氏寫成，繼於 1976 年修正發行第二版。

本文的目的，及以 Box-Jenkins 模式求在河川月逕流（monthly streamflow）方面的最佳時間數列數學模式，做為短期（一月）或中期（數個月）的預報（測）用，以期使該流域水資源得到較佳的利用。

二、水文時間數列之數學模式

本文討論者為等時隔離散單變數時間數列分析（discrete equispaced univariate time series analysis）。其中有幾個時間數列分析中的基本統計觀念：

1. 平穩性。
2. 自相關係數函數。
3. 自相關係數的標準誤差（S.E.）。
4. 偏自相關係數函數（pacf）。

2-1 線性濾過器模式（linear filter model）ARIMA 簡介

本文推計模式源於 Yule (1927)，概念如下：一個高度相依的時間數列由一序列的獨

* 國立成功大學水利及海洋工程研究所教授兼國立中興大學土木工程系系主任、日本東京大學工學博士。

** 國立成功大學水利工程系教授兼水利及海洋工程研究所所長、日本京都大學工學博士。

*** 國立成功大學水利及海洋工程研究所碩士。

臺灣河川月流量預報模式之研究

郭金棟* 張玉田** 李劍青***

摘 要

本文以 Box-Jenkins 模式，根據水文數據的推計特性，探求台灣河川月流量的預報（測）模式。其中信賴界限，除由純統計所得出者外，並於本文依水文統計特性提出修正方法。本文利用國立交通大學電子計算機中心 Decsystem-10 每試算一次約 CPU 一分鐘，容量佔 45K。

一 前 言

為求適當地設計和作業水資源計劃，經由時間來量度逕流、降水等有關水文現象是必需的。在解決該等水資源問題方面，時間數列分析成了一個很重要的工具，故 Box-Jenkins 推計（stochastic）模式族在分析自然的時間數列方面，具有特別的重要性。該書於 1970 年由 Box 氏和 Jenkins 氏寫成，繼於 1976 年修正發行第二版。

本文的目的，及以 Box-Jenkins 模式求在河川月逕流（monthly streamflow）方面的最佳時間數列數學模式，做為短期（一月）或中期（數個月）的預報（測）用，以期使該流域水資源得到較佳的利用。

二 水文時間數列之數學模式

本文討論者為等時隔離散單變數時間數列分析（discrete equispaced univariate time series analysis）。其中有幾個時間數列分析中的基本統計觀念：

1. 平穩性。
2. 自相關係數函數。
3. 自相關係數的標準誤差（S.E.）。
4. 偏自相關係數函數（pacf）。

2-1 線性濾過器模式（linear filter model）ARIMA 簡介

本文推計模式源於 Yule (1927)，概念如下：一個高度相依的時間數列由一序列的獨

* 國立成功大學水利及海洋工程研究所教授兼國立中興大學土木工程系系主任、日本東京大學工學博士。

** 國立成功大學水利工程系教授兼水利及海洋工程研究所所長、日本京都大學工學博士。

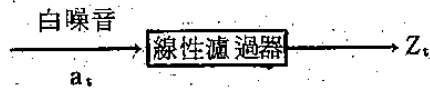
*** 國立成功大學水利及海洋工程研究所碩士。

立震動 (Shock) a_t 所產生， a_t 為白噪音 (white noise)。

令後移運算子 (backward shift operator) B ，後差運算子 (backward difference operator) ∇ ，

$$BZ_t = Z_{t-1}, \quad B^m Z_t = Z_{t-m},$$

$$\nabla Z_t = Z_t - Z_{t-1} = (1-B)Z_t, \quad \nabla = 1-B$$



$$Z_t = \mu + \phi(B)a_t$$

完整的相乘性季節性 ARIMA 模式 (autoregressive integrated moving average models) 如下：

$$\phi_p(B)\Phi_p(B)\nabla^d\nabla_s^D Z_t = \theta_0 + \theta_q\Theta_q(B^s), \quad \nabla_s = 1-B^s$$

各不同子模式的理論 acf 圖形為模式鑑定步驟中最重要的判斷依據，而以 pacf 圖形輔助之。未知參數 ϕ_i 及 θ_i 的容許區域 (admissible regions) 是依 $\phi(B) = 0$ 及 $\theta(B) = 0$ 之根均在單位圓 (unit circle) 外而定。

三、資料分析

河流月流量之時間數列變化，可視為推計過程。其意義略述於下：由於流域保持 (retention) 性質反映現階段流量與前些時段逕流的相依性，及氣候年循環相同季節的相似性，附帶在所考慮期段內由有效降水輸入 (input) 產生的獨立隨機分量。並假設推計過程的統計性質不隨時間改變，因數列時間間隔短於年，由於氣候年循環產生不穩，如本文取月為單位時須取季節性差分 D 使數列平穩之，再利用所得的 W_t ($W_t = \nabla_{12}Z_t$) 數列的相關性依前述理論與步驟以建立模式。

本文資料係以蘭陽溪、濁水溪和高屏溪三者為研究對象。建立模式的起訖年月、測站位置、流域面積，略述如下表：

河 流	起 訖 年 月	測 站 位 置	流 域 面 積
蘭陽溪	39. 1. ~ 64. 12.	蘭陽大橋	820.69 km ²
濁水溪	40. 1. ~ 64. 12.	集 集	2304.20 km ²
高屏溪	40. 1. ~ 64. 12.	九 曲 堂	3075.66 km ²

以蘭陽溪為例，述之於下：

(i) 提供模式的類型並鑑定之，Box-Jenkins 的 ARIMA 季節性模式如下：

$$\phi(B)\Phi(B^s)(1-B)^d(1-B^s)^D Z_t = \theta(B)\Theta(B^s)a_t$$

吾人將原始數據整理後，求其 $d=0, 1$ 的 acf 與 pacf，如圖—2, 3, 4，發現 $\gamma_k(Z_t)$ 在 $k=12, 24, 36, 48, 60$ （一般季節性模式取 $5S \leq N/4$ 即夠）處有尖峯（peak）指示有強烈週期性傾向，由前知其為週期 $S=12$ 的季節性模式。今令 $S=12, D=1, d=$

0，如圖—5, 6，判斷之，得下列兩個子模式，如 $(p, d, q) \times (P, D, Q)$ ：

甲、 $(0, 0, 1) \times (0, 1, 1)_{12}$

乙、 $(2, 0, 0) \times (0, 1, 1)_{12}$

(2) 估計子模式參數值

甲、由圖—5， $\gamma_1 = 0.21$ 且 $\gamma_{12} = -0.45$ ，得起始值 $\hat{\theta}_1 = -0.202$ ， $\hat{\theta}_0 = 0.64$ ，並假設 $\hat{\theta}_0 = 0.1$ ，均方和與參數在疊算過程中的最大相對改變均設為 0.0001，並取 60 個 a_t 的 acf 及 pacf 做自相關檢驗，30 個 $\gamma_k(\hat{a}_t)$ 做波特曼脫檢定。疊算過程由可能函數和 Marquardt 非線性估計法如下：

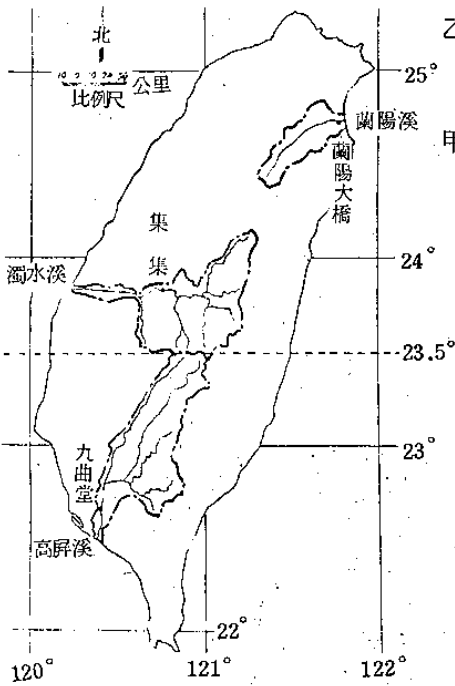


圖 1 各流域及測站位置圖

次數	$\hat{\theta}_0$	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}$	$\Sigma \hat{a}_t^2$
0	0.1000	-0.2020	0.6400	0.980201×10^6
1	-0.5575	-0.2409	0.8116	0.892002×10^6
2	-0.4458	-0.2382	0.8057	0.891799×10^6
3	-0.4424	-0.2381	0.8041	0.891786×10^6

註： θ_0 為預測傾向，因值甚小配合精簡原則可略之。

(3) 診斷上述模式

由波特曼脫檢定，得 $Q=12.50$ ，而 $X_{0.05}^2(27) = 40.1$ ，因 $12.50 < 40.1$ 故合格。取 \hat{a}_t 的自相關個別檢驗，如圖—7，知 a_t 殘差數列大致近於白噪音。

仿前步驟，得乙 $(2, 0, 0) \times (0, 1, 1)_{12}$ 的參數估計值： $\hat{\phi}_1 = 0.2366$ ， $\hat{\phi}_2 = -0.0182$ ， $\hat{\theta}_0 = -0.4561$ ， $\hat{\theta} = 0.805$ ，診斷亦合格。

(4) 最佳分析 (optimal analysis)

因甲、乙兩模式皆合格，今列表比較，由第二節 $a_t = Z_t - \hat{Z}_{t-1}(1)$ ，即實際值與領先一個月的月平均流量預測值之差為 a_t ， Σa_t^2 愈小愈佳 (optimal)。

模	式	Q(30)	$\hat{\sigma}_a^2$	X^2
甲、	$(0, 0, 1) \times (0, 1, 1)_{12}$ $\nabla_{12} Z_t = -0.4424$ $+ (1 + 0.2381B)(1 - 0.8041B^{12})a_t$	12.50	0.891786×10^6	40.1 (27)

$Z_t = (2, 0, 0) \times (0, 1, 1)_{12}$ $(1 - 0.2366B + 0.0182B^2) \nabla_{12} Z_t$ $= -0.4561 + (1 - 0.8050B^{12}) a_t$	12.13	0.888956 $\times 10^6$	38.9 (26)
--	-------	---------------------------	--------------

知乙模式最佳。

若吾人懷疑是否有其它適當週期存在，可以累積波譜圖檢驗之。如圖—8，為蘭陽溪溪者，可知 $S=12$ 合理。本文取危險率 $\epsilon = 0.05$ (5%)。

由蘭陽溪逐月推計結果，可知擬合情形及殘差 \hat{a}_t 。預測時，因 a_t 不知可視為零。

因 $\nabla_{12} Z_t = (1 - B^{12}) Z_t = Z_t - B^{12} Z_t = Z_t - Z_{t-12}$ ，可知蘭陽溪模式展開如下式：

$$Z_t = -0.4561 + 0.2366Z_{t-1} - 0.0182Z_{t-2} + Z_{t-12} - 0.2366Z_{t-13}$$

$$+ 0.0182Z_{t-14} + a_t - 0.805a_{t-12}$$

$\hat{Z}_t(\ell)$ ：表以 t 為起點，領先 ℓ 個月的預測值，得：

$$\hat{Z}_{312}(1) = -0.4561 + 0.2366Z_{312} - 0.0182Z_{311} + Z_{301} - 0.2366Z_{300}$$

$$+ 0.0182Z_{299} + a_{313} - 0.805a_{301}$$

$$= 34.72$$

$$\hat{Z}_{312}(2) = -0.4561 + 0.2366\hat{Z}_{312}(1) - \dots$$

$$= 3.79$$

仿此可推計到無窮遠，但效果不佳，本文預測至 \hat{Z}_{324} ，即 $\hat{Z}_{312}(12)$ ，見圖—9。

同上步驟，得濁水溪、高屏溪模式如下：

濁水濁集集站模式：

$$\nabla_{12} Z_t = -0.9726 + (1 + 0.2951B + 0.2093B^2)(1 + 0.7284B^{12})a_t$$

高屏溪九曲堂站模式：

$$\nabla_{12}^2 Z_t = 2.6753 + (1 + 0.0392B + 0.1661B^2)(1 - 0.8079B^{12})a_t$$

其預測圖，見圖—10, 11。

四 討 論

(1) 預測信賴界限

由純統計理論，本模式 95% 信賴區間是：

$$\hat{Z}_t(\ell) \pm 1.96 \left[1 + \sum_{j=1}^{\ell-1} \phi_j^2 \right]^{1/2} \delta_a$$

實際應用水文問題時，本文建議利用水文統計特性改進此界限的計算方法，即求每個月份的標準誤差 δ_i ($i = 1, \dots, 12$)。今重新定義信賴界限於下：

$$Z_{\text{上限}}(n) = \hat{Z}_t(\ell) + 1.96 \left[1 + \sum_{j=1}^{\ell-1} \phi_j^2 \right]^{1/2} \min(\delta_1, \delta_a)$$

$$Z \text{ 下限}(n) = \hat{Z}_t(\ell) - 1.96 [1 + \sum_{j=1}^{t-1} \phi_j^2]^{1/2} \min(\delta_1, \delta_2)$$

($Z \text{ 下限}(n) \geq 0$), n : 數列第 n 個點。

可由各預測圖 — 9, 10, 11 粗線表出。

(2) 建立模式所需紀錄年限

一般而言，在典型的 ARIMA 模式建立時，至少 W_t 數列需 50 個以上的值。在本文內需取季節性差分 ∇ ，故至少需六年以上的紀錄，方能嘗試建立模式。今以蘭陽溪驗證如下：（原始 $N = 312$ ，上下限取 95% 的信賴度）

係 數	ϕ_1	ϕ_2	θ_0	θ_1
(上限)	(0.3537)	(0.0986)	(0.9879)	(0.8767)
$N = 312$	0.2366	-0.0182	-0.4561	0.8050
(下限)	(0.1195)	(-0.1350)	(-1.9000)	(0.7332)
$N = 192$	0.1724	-0.0439	0.8706	0.7273
(~64年)				
$N = 72$	0.1804	-0.1144	3.9795	0.8555
(~72年)				

除 θ_0 (單位：CMS) 有較大變化外，餘者皆在信賴範圍內，故有六年連續紀錄 ($N = 72$) 即可嘗試建立模式，但樣本誤差的影響必增大。

濁水溪取十年紀錄亦符合。

五 結 論

在本文表現的方法是決定一個精簡而有效的推計模式，適當地模擬河川月逕流量的變化，並以 Box-Jenkins 方法研究一個動態模式在複雜的自然水文現象適用情形。就統計哲學觀點來看，ARIMA 模式具有嚴密合理的疊算步驟，且可針對水文紀錄數據的非純隨機性（取自相關）、非平穩性（取差分）來建立水文模式。而應用模式時，使用者必需注意“適當地基於預測”，如蘭陽溪預測圖。又建立模式時，切忌死套統計公式，必視物理條件修正之，如信賴界限。

由本文看來，ARIMA 模式在水文預測時適合短期（一個月）或中期（三至五個月）仿此可推廣至其它測站，或可將數據取週平均值，旬平均值，也可應用於雨量或其它水文紀錄的預報用。

六 誌 謝

本文之完成，承蒙恩師 郭金棟博士、張玉田博士悉心指導，交通大學 向傳心博士、張仲陶教授的賜助，及父母的關懷，家兄李劍文、舍妹李婉琛的打字校稿，始得竟

其功。

Hipel 博士遠從加拿大寄來很多可貴的資料，在此一併致謝。

七 參考文獻

1. 向傳心、張德新：應用時間數列（講義），66年3月。
2. 刁錦寰：時間序列分析（講義），66年6月。
3. 張玉田：台灣省蘭陽溪における月流量時系列の解析，1969年4月。
4. 周文德：推計（或測）水力學——一個新穎的研究課題，水利復刊第13期，60年11月7日。
5. George C. Tiao: An introduction to applied time series analysis, University of Wisconsin, Madison.
6. Box-Jenkins: Time series analysis-forecasting and control, revised edition, 1976.
7. K. W. Hipel, A. I. McLeod, E. A. McBean: Stochastic modeling of the effects of reservoir operation. J. of hydrology, 33(1977) 97-113.
8. K. W. Hipel, A. I. McLeod, E. A. McBean: Advances in Box-Jenkins Modeling 1. Model-Construction, 2. Application, WRR Vol.13, June 1977.

A study on the forecasting model of the monthly streamflow in Taiwan

Chin T. Kuo * Yu T. Chang ** Jian-Chin Lee ***

Abstract

In this paper, the author uses the ARIMA model (Box-Jenkins, 1970) to build the forecasting model of the monthly streamflow in Taiwan. To use the linear filter concept in stochastic hydrology is very important in practical engineering problem. Short and medium-term forecasts are then computed. The confidence limits of these forecasts are determined by combining the results of the presented method in the discussion and those obtained by pure statistical analysis of the data.

附 圖

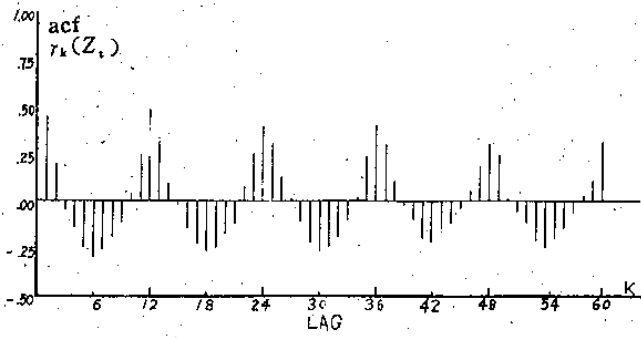


圖2 蘭陽溪 Z_t 之 acf

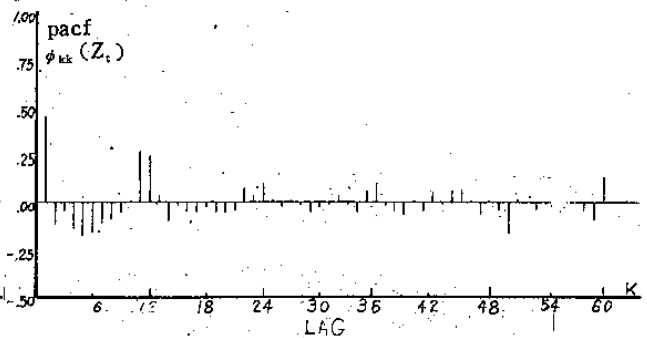


圖3 蘭陽溪 Z_t 之 pacf

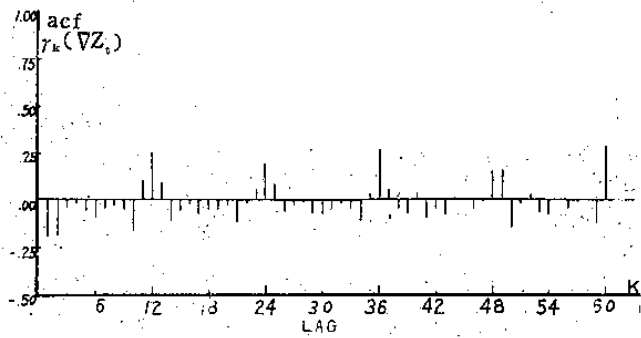


圖4 蘭陽溪 ∇Z_t 之 acf

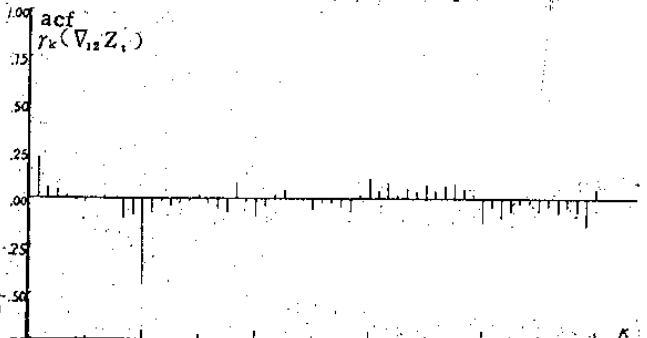


圖5 蘭陽溪 $\nabla_{12} Z_t$ 之 acf

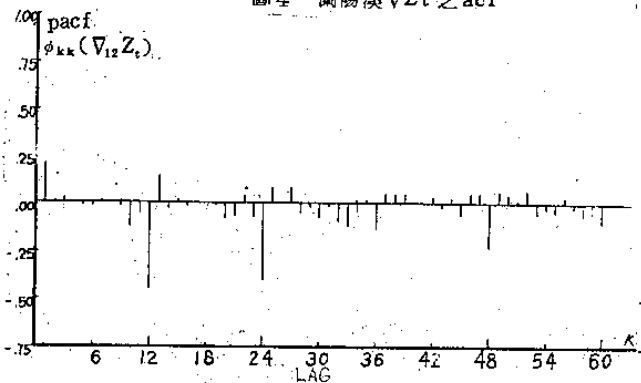


圖6 蘭陽溪 $\nabla_{12} Z_t$ 之 pacf

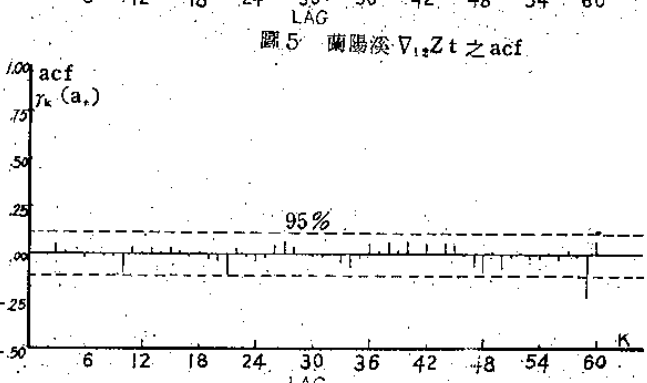


圖7 蘭陽溪 a_t 之 acf

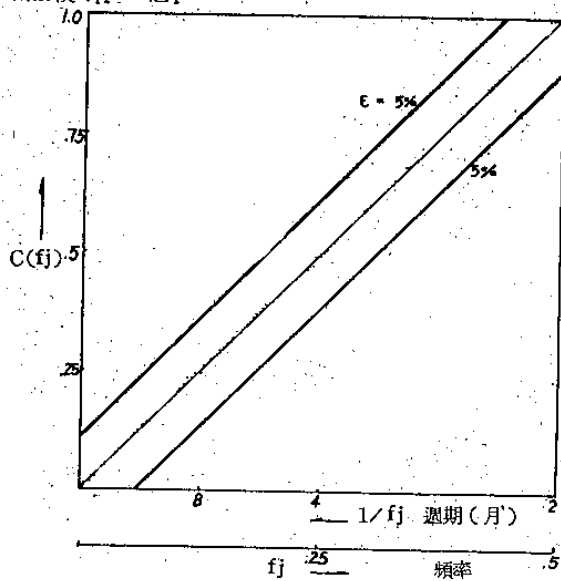


圖8 蘭陽溪累積波譜檢驗圖

